

119

Библиотечка КВАНТ⁺

ВЫПУСК

119

Библиотечка КВАНТ⁺

Н.Б. Васильев, А.А. Егоров

$(\xi_1 - a)$

σ^2

$x = M(T(\varepsilon))$

$f(x, \theta)dx =$

$(x)f(x, \theta)$

**ЗАДАЧИ
ВСЕСОЮЗНЫХ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ
ОЛИМПИАД**

[+ = × - ÷]

Часть 2





Приложение к журналу
«Квант⁺» № 1/2011

Н.Б.ВАСИЛЬЕВ, А.А.ЕГОРОВ

**ЗАДАЧИ
ВСЕСОЮЗНЫХ
МАТЕМАТИЧЕСКИХ
ОЛИМПИАД**

Часть 2

Москва 2011

УДК 373.167.1:51+51(075.3)
ББК 22.1я721
В19

Серия «Библиотечка «Квант»
основана в 1980 году

Редакционная коллегия:

Б.М.Болотовский, А.А.Варламов, Г.С.Голицын, Ю.В.Гуляев,
М.И.Каганов, С.С.Кротов, С.П.Новиков, В.В.Произволов, Н.Х.Ро-
зов, А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин, В.М.Тихомиров, А.Р.Хохлов, А.И.Чер-
ноуцан

Васильев Н.Б., Егоров А.А.

В19 Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 2. – М.:
МЦНМО, 2011. – 128 с. (Библиотечка «Квант+». Вып. 119.
Приложение к журналу «Квант+» №1/2011.)

ISBN 978-5-94057-816-1

Сборник содержит более 200 задач, предлагавшихся на заключи-
тельных турах математических олимпиад СССР. Задачи размещены в
хронологическом порядке и снабжены решениями. Многие из них
являются своеобразными математическими исследованиями, позволяю-
щими читателям ознакомиться с идеями и методами современной
математики.

Книга предназначена для школьников старших классов, учителей
математики и руководителей математических кружков.

ББК 22.1я721

ISBN 978-5-94057-816-1

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

10-я Всесоюзная олимпиада, 1976 г. (Душанбе)

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	220	221	222а,б	223	229	230	231	
9	222б	224	223	225	230	232	231	
10	223	226	227	228	225	233	234	231

220. На столе лежат 50 правильно идущих часов. Докажите, что в некоторый момент сумма расстояний от центра стола до концов минутных стрелок окажется больше суммы расстояний от центра стола до центров часов.

221. В строчку подряд написано 1000 чисел. Под ней пишется вторая строчка чисел по следующему правилу: под каждым числом a первой строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз a встречается в первой строчке. Из второй строчки таким же образом получается третья: под каждым числом b второй строчки выписывается натуральное число, указывающее, сколько раз b встречается во второй строчке. Затем из третьей строчки так же строится четвертая, из четвертой – пятая и так далее.

а) Докажите, что некоторая строчка совпадает со следующей.

б) Более того, докажите, что 11-я строчка совпадает с 12-й.

в) Приведите пример такой первоначальной строчки, для которой 10-я строчка не совпадает с 11-й.

222. На плоскости даны три окружности одинакового радиуса.

а) Докажите, что если все они пересекаются в одной точке, как показано на рисунке 1,а, то сумма отмеченных дуг AK , CK , EK равна 180° .

б) Докажите, что если они расположены

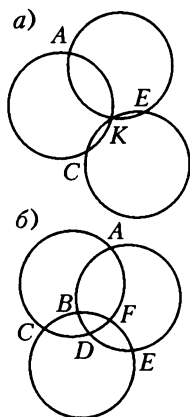


Рис. 1

так, как показано на рисунке 1,б, то сумма отмеченных дуг AB , CD , EF равна 180° .

223. Натуральные числа x_1, x_2 меньше 10000. Исходя из них строится последовательность $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, где число x_3 равно $|x_1 - x_2|$, число x_4 равно наименьшему из чисел $|x_1 - x_2|, |x_2 - x_3|, |x_1 - x_3|$, число x_5 равно наименьшему из чисел $|x_1 - x_2|, |x_1 - x_3|, |x_1 - x_4|, |x_2 - x_3|, |x_2 - x_4|, |x_3 - x_4|$ и так далее (каждое следующее число равно наименьшей из абсолютных величин разностей между предыдущими числами). Докажите, что обязательно $x_{21} = 0$.

224. Можно ли вершины куба занумеровать различными трехзначными числами, составленными из цифр 1 и 2, так чтобы номера любых двух соседних вершин различались не менее чем в двух разрядах?

225*. На плоскости даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, сумма которых равна $\vec{0}$. Докажите неравенство

$$|\vec{a}| + |\vec{b}| + |\vec{c}| + |\vec{d}| \geq |\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{b} + \vec{c}|.$$

226. В правильном 1976-угольнике отмечены середины всех сторон и середины всех диагоналей. Какое наибольшее число отмеченных точек лежит на одной окружности?

227. На квадратном листе бумаги нарисованы n прямоугольников со сторонами, параллельными сторонам листа. Никакие два из этих прямоугольников не имеют общих внутренних точек. Докажите, что если вырезать все прямоугольники, то количество кусков, на которые распадется оставшаяся часть листа, не более $n + 1$.

228. По трем прямолинейным дорогам с постоянными скоростями идут три пешехода. В начальный момент времени они не находились на одной прямой. Докажите, что они могут оказаться на одной прямой не более двух раз.

229. На шахматной доске размера 99×99 отмечена фигура (эта фигура будет разной в пунктах а), б), в)). В каждой клетке фигуры Φ сидит по жуку. В какой-то момент жуки взлетели и сели снова в клетки той же фигуры Φ ; при этом в одну клетку могло сесть несколько жуков. После перелета любые два жука, занимавшие соседние клетки, оказались снова в соседних клетках или попали на одну клетку. (Соседними называются клетки, имеющие общую сторону или общую вершину.)

а) Пусть фигура Φ – это «центральный крест», т.е. объединение средней вертикали и средней горизонтали (рис.2,а). Докажите, что в этом случае какой-то жук вернулся на место либо перелетал в соседнюю клетку.

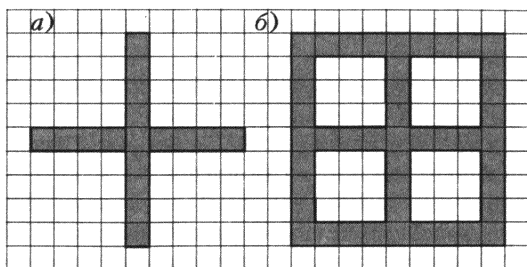


Рис 2

б) Верно ли утверждение, если фигура – это «оконная рама», т.е. объединение центрального креста и всех граничных клеток доски (рис.2,б)?

в*) Верно ли утверждение, если фигура – это вся доска?

230. Будем называть треугольник «большим», если длины всех его сторон больше 1. Дан правильный треугольник ABC со стороной длины 5. Докажите, что:

а) из треугольника ABC можно вырезать 100 «больших» треугольников;

б) треугольник ABC можно целиком разрезать не менее чем на 100 «больших» треугольников.

в*) треугольник ABC можно разрезать не менее чем на 100 «больших» треугольников, соблюдая следующее условие: любые два «больших» треугольника либо не пересекаются, либо имеют ровно одну общую вершину, либо сторона одного из них является стороной другого. (Такое разрезание называется триангуляцией.)

г*) решите задачи б) и в) для правильного треугольника со стороной длины 3.

231. Дано натуральное число n . Последовательность натуральных чисел a_1, a_2, \dots, a_k ($k \geq n$) назовем универсальной для данного n , если из нее можно получить вычеркиванием части членов любую перестановку чисел $1, 2, \dots, n$ (т.е. любую последовательность из n чисел, в которую каждое из чисел $1, 2, \dots, n$ входит по одному разу). Например, последовательность $(1, 2, 3, 1, 2, 1, 3)$ является универсальной для $n = 3$, а последовательность $(1, 2, 3, 2, 1, 3, 1)$ не универсальна, так как из нее никаким вычеркиванием нельзя получить перестановку $(3, 1, 2)$. Цель этой задачи – получить оценку числа членов самой короткой универсальной последовательности (для данного n).

а) Приведите пример универсальной последовательности из n^2 членов.

б) Приведите пример универсальной последовательности из $n^2 - n + 1$ членов.

в*) Докажите, что любая универсальная последовательность состоит не менее чем из $n(n+1)/2$ членов.

г*) Докажите, что при $n = 4$ самая короткая универсальная последовательность состоит из 12 членов.

д*) Попробуйте найти для данного n как можно более короткую универсальную последовательность. (Жюри умеет строить универсальную последовательность из $n^2 - 2n + 4$ членов.)

232. На окружности расположены n действительных чисел, сумма которых равна нулю. Одно из этих чисел равно 1.

а) Докажите, что есть два соседних числа, различающихся не менее чем на $4/n$.

б*) Докажите, что есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $8/n^2$.

в*) Оценку, предложенную в предыдущем пункте, можно улучшить. Попробуйте заменить в ней число 8 каким-нибудь большим числом так, чтобы утверждение этой задачи по-прежнему выполнялось для всех натуральных чисел.

г*) Докажите, что для $n = 30$ на окружности есть число, отличающееся от среднего арифметического двух своих соседей не менее чем на $2/113$. Приведите пример набора из 30 чисел на окружности, в котором ни одно число не отличается от среднего арифметического двух своих соседей более чем на $2/113$.

233. В вершинах правильного n -угольника с центром в точке O расставлены числа $(+1)$ и (-1) . За один шаг разрешается изменить знак у все чисел, стоящих в вершинах какого-либо правильного k -угольника с центром O (при этом мы допускаем и 2-угольники, понимая под 2-угольником отрезок с серединой в точке O). Докажите, что в случаях а), б), в) существует такое первоначальное расположение $(+1)$ и (-1) , что из него ни за какое число шагов нельзя получить набор из одних $(+1)$:

а) $n = 15$;

б) $n = 30$;

в*) n – любое число, большее 2.

г*) Попробуйте пояснить для произвольного n , чему равно наибольшее число $K(n)$ различных расстановок $(+1)$ и (-1) , среди которых ни одну нельзя получить из другой за несколько шагов. Докажите, например, что $K(200) = 2^{80}$.

234*. На сфере радиуса 1 проведена окружность большого круга, которую мы будем называть экватором. Нам будет удобно

использовать и другие географические термины: полюс, меридиан, параллель.

а) Зададим на этой сфере функцию f , ставящую в соответствие каждой точке сферы квадрат расстояния от этой точки до плоскости экватора. Проверьте, что эта функция обладает следующим свойством:

(*) если M_1, M_2, M_3 – концы трех взаимно перпендикулярных радиусов сферы, то $f(M_1) + f(M_2) + f(M_3) = 1$.

Во всех следующих пунктах f – произвольная неотрицательная функция на сфере, которая обращается в 0 во всех точках экватора и обладает свойством (*).

б) Пусть M и N – точки одного меридиана, расположенные между северным полюсом и экватором. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем точка N , то $f(M) > f(N)$.

в) Пусть M и N – произвольные точки сферы. Докажите, что если точка M дальше от плоскости экватора, чем N , то $f(M) > f(N)$.

г) Докажите, что если точки M и N лежат на одной параллели, то $f(M) = f(N)$.

д) Докажите, что функция f совпадает с функцией, описанной в пункте а).

11-я Всесоюзная олимпиада, 1977 г. (Таллин)

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	235	236	237	238	243	244а, б	245	246
9	237а	239	235	240	247	248	249	250
10	237а	239	241	242 235	251	244а, в-д	246	

235. На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особенных пар четно.

236. На плоскости отмечено несколько точек, не лежащих на одной прямой, и около каждой написано число. Известно, что если прямая проходит через две или более отмеченных точек, то сумма всех чисел, написанных около этих точек, равна нулю. Докажите, что все числа равны нулю.

237. а) В окружность вписаны треугольники T_1 и T_2 , причем вершины треугольника T_1 являются серединами дуг, на которые

окружность разбивается вершинами треугольника T_2 . Докажите, что в шестиугольнике $T_1 \cap T_2$ диагонали, соединяющие противоположные вершины, параллельны сторонам треугольника T_1 и пересекаются в одной точке.

б) Отрезок, соединяющий середины дуг AB и AC окружности, описанной около треугольника ABC , пересекает стороны AB и AC в точках D и K . Докажите, что точки A , D , K и центр O вписанной окружности треугольника ABC — вершины ромба.

238. По окружности расположено несколько черных и белых фишек. Двое по очереди проделывают такую операцию: первый убирает все черные фишки, а второй после этого убирает все белые фишки, имеющие черного соседа. Так они делают до тех пор, пока не останутся все фишки одного цвета.

а) Пусть вначале было 40 фишек. Может ли случиться, что после того, как каждый сделает два хода, на окружности останется одна фишка?

б*) На окружности сначала было 1000 фишек. Через какое наименьшее число ходов на окружности может остаться одна фишка?

239*. Дана бесконечная числовая последовательность $\{a_n\}$. Известно, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a_{n+1} - \frac{a_n}{2} \right) = 0$. Докажите, что $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

240*. В некоторой стране из каждого города в любой другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них); и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.

241. В каждой вершине выпуклого многогранника M сходится 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоуголь-

ником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.

242*. Написан многочлен $x^{10} + *x^9 + *x^8 + \dots + *x^2 + *x + 1$. Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из звездочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звездочек, затем снова первый заменяет одну из звездочек числом и т.д. (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если будет хотя бы один корень – выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого?

243. За круглым столом сидят 7 гномов. Перед каждым стоит кружка. В некоторые из этих кружек налито молоко. Один из гномов разливает все свое молоко в кружки остальных поровну. Затем его сосед справа делает то же самое. Затем то же самое делает следующий сосед справа и так далее. После того, как последний, седьмой гном разлил всем остальным свое молоко, в каждой кружке оказалось столько же молока, сколько было в ней вначале. Во всех кружках вместе молока 3 литра. Сколько молока было первоначально в каждой кружке?

244. Будем называть $2n$ -значное число особым, если оно само является точным квадратом, и числа, образованные его первыми цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами (при этом второе n -значное число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю, а первое не может начинаться с нуля).

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Возможны ли шестизначные особые числа? (Докажите, что их нет, или приведите пример такого числа.)

в*) Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

г*) Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

д*) Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число.

245*. Дано множество положительных чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Для каждого его подмножества выпишем сумму входящих в него чисел (рассматриваются суммы из одного, двух, ..., n слагаемых). Докажите, что все выписанные числа можно так разбить на n групп, чтобы в каждой группе отношение наибольшего числа к наименьшему не превосходило 2.

246. Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешается

опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычеркиванием одной из цифр. Докажите, что:

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее чем в 40 ящиков;

в*) нельзя разложить все билеты менее чем в 50 ящиков;

г*) Пусть билеты имеют четырехзначные номера (от 0000 до 0001) и билет разрешается опускать в ящик, номер которого можно получить из номера билета вычеркиванием каких-либо двух цифр. Докажите, что все четырехзначные билеты можно разложить в 34 ящика.

д*) Какой минимальный набор ящиков потребуется для k -значных билетов ($k = 4, 5, 6, \dots$) ?

247. Дан квадратный лист клетчатой бумаги 100×100 клеток. Проведено несколько несамопересекающихся ломаных, идущих по сторонам клеток и не имеющих общих точек. Эти ломаные идут строго внутри квадрата, а концами выходят на его границу. Докажите, что кроме вершин квадрата найдется узел (внутри или на границе), не принадлежащий ни одной ломаной.

248*. Даны натуральные числа x_1, x_2, \dots, x_n и y_1, y_2, \dots, y_m . Суммы $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ и $y_1 + y_2 + \dots + y_m$ равны между собой и меньше m . Докажите, что в равенстве $x_1 + x_2 + \dots + x_n = y_1 + y_2 + \dots + y_m$ можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.

249. На плоскости даны 1000 квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Пусть M – множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы каждая точка множества M попала не менее чем в один и не более чем в четыре отмеченных квадрата.

250. На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется любая гиря и добавляется на ту или другую чашку весов).

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее.

Этой последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв L и R : $LRLRLR\dots$ Здесь буква L обозначает, что перевесила левая чашка, а буква R означает, что перевесила правая чашка.

б*) Докажите, что для любого слова длины n из букв L и R можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это

слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний.

251*. Мы будем рассматривать многочлены от одного переменного x со старшим коэффициентом 1. Будем говорить, что два таких многочлена P и Q коммутируют, если многочлены $P(Q(x))$ и $Q(P(x))$ тождественно равны (т.е. после раскрытия скобок и приведения к стандартному виду все коэффициенты этих многочленов совпадают).

а) Для каждого числа α найдите все многочлены Q степени не выше трех, коммутирующие с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$.

б) Пусть P – многочлен степени 2, k – натуральное число. Докажите, что существует не более одного многочлена степени k , коммутирующего с P .

в) Найдите многочлены степеней 4 и 8, коммутирующие с данным многочленом P степени 2.

г) Многочлены R и Q коммутируют с одним и тем же многочленом P степени 2. Докажите, что они коммутируют между собой.

д) Докажите, что существует бесконечная последовательность многочленов $P_2, P_3, P_4, \dots, P_k, \dots$, где P_k – многочлен степени k , в которой любые два многочлена коммутируют и многочлен P_2 имеет вид $P_2(x) = x^2 - 2$.

12-я Всесоюзная олимпиада, 1978 г. (Ташкент)

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	252	253	254	255а, б	260	261	262	263
9	252	253	256	257	260	261	264	265
10	258	259	255в, г, д	257	260	266	267	268

252. Обозначим через a_n целое число, ближайшее к \sqrt{n} . Найдите сумму

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{1980}}.$$

253. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что $ABMD$ – параллелограмм. Докажите, что если $\angle CBM = \angle CDM$, то $\angle ACD = \angle BCM$.

254. Докажите, что ни при каком натуральном m число $1978^m - 1$ не делится на $1000^m - 1$.

255. На плоскости (или в пространстве) задано конечное множество K_0 . К нему добавляются все точки, которые можно

получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается K_1 . Аналогично из множества K_1 получается K_2 , из K_2 — K_3 и т.д.

а) Пусть множество K_0 состоит из двух точек A и B на расстоянии 1. При каком наименьшем n в множестве K_n найдется точка, находящаяся на расстоянии 1000 от точки A ?

б) Пусть K_0 состоит из трех вершин правильного треугольника площади 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество K_n ($n = 1, 2, \dots$).

В следующих пунктах K_0 — множество из четырех точек, являющихся вершинами правильного тетраэдра единичного объема.

в) Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки множества K_1 . Сколько и каких граней у этого многогранника?

г) Чему равен объем этого многогранника?

д*) Найдите объем наименьшего выпуклого многогранника, содержащего множества K_n (при $n = 2, 3, \dots$).

256. Даны две кучки спичек. В начале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m > n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За один ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в одной из кучек.

а) Докажите, что если $m > 2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

б) При каких α верно следующее утверждение: если $m > \alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш?

257*. Докажите, что существует такая бесконечная ограниченная последовательность x_n , что для любых различных m и k выполнено неравенство

$$|x_m - x_k| \geq \frac{1}{|m - k|}.$$

258. Пусть $f(x) = x^2 - x + 1$. Докажите, что для любого натурального числа $m > 1$ числа $m, f(m), f(f(m)), \dots$ попарно взаимно просты.

259. Докажите, что существует такое число A , что в график функции $y = A \sin x$ можно вписать не менее 1978 попарно неравных квадратов. (Квадрат называется вписанным, если все его вершины принадлежат графику.)

260. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом. Первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает новую карточку $(a + 1; b + 1)$; второй, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $(a/2; b/2)$ (он работает только тогда, когда a и b четные); третий автомат по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$. Кроме того, автоматы выдают обратно все прочитанные карточки.

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(5; 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку: а) $(1; 50)$? б) $(1; 100)$?

в) Пусть первоначально имеется одна карточка $(a; b)$, $a < b$, а мы хотим получить карточку $(1; n)$. При каких n это можно сделать?

261. В окружность радиуса R вписан n -угольник площади 5. На каждой стороне n -угольника отмечено по точке. Докажите, что периметр n -угольника с вершинами в отмеченных точках не меньше $2S/R$.

262. Фишка стоит в углу шахматной доски размером $n \times n$ клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Докажите, что если n четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если n нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним?

263. На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать?

264. Числа x_1, x_2, \dots, x_n принадлежат отрезку $[a; b]$, где $0 < a < b$. Докажите неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2.$$

265*. Дано простое число $p > 3$. Рассмотрим на координатной плоскости множество M , состоящее из таких точек с целыми координатами (x, y) , что $0 \leq x < p$, $0 \leq y < p$. Докажите, что можно отметить p различных точек множества M так, чтобы

никакие четыре из них не лежали в вершинах параллелограмма и никакие три из них не лежали на одной прямой.

266*. Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше $\sqrt{2}$.

267. Рассмотрим n чисел a_1, a_2, \dots, a_n . Положим

$$b_k = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_k}{k} \quad (\text{для } k = 1, 2, \dots, n),$$

$$C = (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2,$$

$$D = (a_1 - b_n)^2 + (a_2 - b_n)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2.$$

Докажите неравенства $C \leq D \leq 2C$.

268*. Рассмотрим последовательность чисел $x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$. Каждое из них приводится к виду

$$x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

где q_n, r_n, s_n, t_n — целые числа. Найдите пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n}.$$

13-я Всесоюзная олимпиада, 1979 г. (Тбилиси)

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	269	270	271		274	276	276	277
9	269	272	271		278	279	280	281
10	273	272	271		276	275	282	283

269. Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат на трех разных сторонах другого?

270. Кенгуру прыгает по углу $x \geq 0$, $y \geq 0$ координатной плоскости Oxy следующим образом: из точки $(x; y)$ кенгуру может прыгнуть в точку $(x - 5; y + 7)$ или в точку $(x + 1; y - 1)$, причем прыгать в точки, у которых одна из координат отрицательна, не разрешается. Из каких начальных точек $(x; y)$ кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии больше 1000 от начала координат? Нарисуйте множество всех таких точек $(x; y)$ и найдите его площадь.

271. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если B – враг A , то A – враг B .)

272. В тетради написано несколько чисел. Разрешается приписать к уже написанным числам любое число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если только оно отлично от всех уже написанных. Докажите, что, начиная с двух чисел 0 и 1, с помощью таких приписок можно получить:

а) число $1/5$;

б*) любое рациональное число между 0 и 1.

273. Убывающая последовательность x_n положительных чисел такова, что при любом натуральном n

$$x_1 + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \dots + \frac{x_{n^2}}{n} \leq 1.$$

Докажите, что при любом натуральном n

$$x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots + \frac{x_n}{n} \leq 3.$$

274. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар A, B этих точек взяты векторы \overline{AB} , причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.

275. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размером

а) 8×8 клеток;

б) $n \times n$ клеток

для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставятся в центры полей.)

276. Найдите x и y из системы уравнений

$$\frac{x - y\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = a, \quad \frac{y - x\sqrt{x^2 - y^2}}{\sqrt{1 - x^2 + y^2}} = b$$

(a и b – данные числа).

277. Имеется несколько квадратов, сумма площадей которых равна 4. Докажите, что такими квадратами всегда можно покрыть квадрат площади 1.

278. Докажите, что для любых чисел x_2, x_3, \dots, x_n , принадлежащих отрезку $[0; 1]$, выполняется неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + 1)^2 \geq 4(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2).$$

279. Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0; 1]$ разбит на $p + q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $p + q - 2$ чисел

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \dots, \frac{p-1}{p}, \frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \dots, \frac{q-1}{q}.$$

280. Через точку O в пространстве проведено 1979 прямых $l_1, l_2, \dots, l_{1979}$, никакие две из которых не взаимно перпендикулярны. На прямой l_1 взята произвольная точка A_1 , отличная от O . Докажите, что можно выбрать точки A_i на l_i , $i = 2, 3, \dots, 1979$, таким образом, чтобы следующие 1979 пар прямых были взаимно перпендикулярными:

$$A_1A_3 \perp l_2, A_2A_4 \perp l_3, \dots, A_{i-1}A_{i+1} \perp l_i, \dots$$

$$\dots, A_{1977}A_{1979} \perp l_{1978}, A_{1978}A_1 \perp l_{1979}, A_{1979}A_2 \perp l_1.$$

281*. Конечная последовательность a_1, a_2, \dots, a_n из чисел 0 и 1 должна удовлетворять следующему условию: для любого целого k от 0 до $n - 1$ сумма

$$a_1a_{k+1} + a_2a_{k+2} + \dots + a_{n-k}a_n$$

является нечетным числом.

а) Придумайте такую последовательность для $n = 25$.

б) Докажите, что такая последовательность существует для некоторого $n > 1000$.

282. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ разрезан своими диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что если радиусы всех четырех окружностей, вписанных в эти треугольники, равны между собой, то четырехугольник $ABCD$ — ромб.

283*. На прямой по порядку расположены точки A_1, A_2, \dots, A_n так, что длины отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ не превосходят 1. Требуется отметить $k - 1$ из точек A_2, \dots, A_{n-1} красным цветом так, чтобы длины любых двух из k частей, на которые отрезок A_1A_n разбивается красными точками, отличались не более чем на 1. Докажите, что это всегда можно сделать:

а) для $k = 3$;

б) для каждого натурального $k < n - 1$.

**14-я Всесоюзная олимпиада,
1980 г. (Саратов)**

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	284	285	286	287	293	294	295	296
9	288	289	286	290	295	297	298	299
10	291	289	292	290	300	301	302	303

284. Двухзначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получающееся число

192021 ... 7980

на 1980?

285. Вертикальная сторона AB квадрата $ABCD$ разделена на n отрезков так, что сумма длин отрезков с четными номерами равна сумме длин отрезков с нечетными номерами. Через точки деления проведены отрезки, параллельные стороне AD , а затем каждая из получившихся n полосок диагональю BD разбита на две части – левую и правую.

Докажите, что сумма площадей левых частей с нечетными номерами равна сумме площадей правых частей с четными номерами (на рис.3 эти части заштрихованы).

286. Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза 18 тонн. Имеется семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза.

Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они смогут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз.

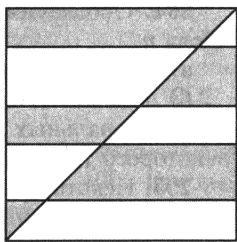


Рис. 3

287. Точки M и P – середины сторон BC и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$. Известно, что $AM + AP = a$. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ меньше $a^2/2$.

288. Имеет ли уравнение $x^2 + y^3 = z^4$ решения в простых числах x, y, z ?

289. На диаметре AC некоторой окружности дана точка E . Проведите через нее хорду BD так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была наибольшей.

290. На берегу большого круглого озера расположено несколько населенных пунктов. Между некоторыми из них установлено теплоходное сообщение. Известно, что два пункта связаны рейсом тогда и только тогда, когда два следующих за ними против часовой стрелки пункта рейсом не связаны. Докажите, что из любого пункта в любой другой пункт можно добраться теплоходом, причем не более чем с двумя пересадками.

291. Шестизначное число, записанное шестью отличными от нуля различными цифрами, делится на 37. Докажите, что перестановками цифр этого числа можно получить еще по крайней мере 23 различных шестизначных числа, делящихся на 37.

292. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin x + 2 \sin (x + y + z) = 0, \\ \sin y + 3 \sin (x + y + z) = 0, \\ \sin z + 4 \sin (x + y + z) = 0. \end{cases}$$

293. На плоскости дано 1980 векторов, причем среди них есть не коллинеарные. Известно, что сумма любых 1979 векторов коллинеарна с вектором, не включенным в сумму. Докажите, что сумма всех 1980 векторов равна нулевому вектору.

294. Обозначим через $S(n)$ сумму всех цифр натурального числа n .

а) Существует ли натуральное n такое, что $n + S(n) = 1980$?

б) Докажите, что хотя бы одно из любых двух последовательных натуральных чисел представимо в виде $n + S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n .

295. Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги окрашены в красный цвет, остальные в синий, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером 2×3 содержит в точности две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером 9×11 ?

296. Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно день, причем после этого у него по крайней мере еще один день есть иммунитет – т.е. он здоров и заболеть опять в этот день не может. Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их.

Докажите, что:

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго;

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится.

297. Обозначим через $P(n)$ произведение всех цифр натурального числа n . Может ли последовательность (n_k) , заданная рекуррентной формулой $n_{k+1} = n_k + P(n_k)$ и своим первым членом $n_1 \in \mathbb{N}$, оказаться неограниченной?

298. Дан правильный треугольник ABC . Некоторая прямая, параллельная прямой AC , пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D – центр треугольника PMB , точка E – середина отрезка AP . Определите углы треугольника DEC .

299. Пусть длины ребер прямоугольного параллелепипеда равны x , y и z сантиметров ($x < y < z$), а $p = 4(x + y + z)$, $s = 2(xy + yz + xz)$ и $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – соответственно его периметр, площадь поверхности и длина диагонали. Докажите, что

$$x < \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} p - \sqrt{d^2 - \frac{1}{2} s} \right),$$
$$z > \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} p + \sqrt{d^2 - \frac{1}{2} s} \right).$$

300. Множество A состоит из целых чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждый элемент A , кроме 1, равен сумме двух (возможно, равных) чисел, принадлежащих A . Укажите среди всех множеств A , удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов.

301. Докажите, что существует бесконечно много чисел B , для которых уравнение

$$\left[x^{3/2} \right] + \left[y^{3/2} \right] = B$$

имеет по крайней мере 1980 решений в натуральных числах x , y ($[z]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее числа z).

302. В тетраэдре $ABCD$ ребро AC перпендикулярно BC , а AD перпендикулярно BD . Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше чем CD/AB .

303. Число $x \in [0; 1]$ записано в виде бесконечной десятичной дроби. Переставив ее первые 5 цифр после запятой в произвольном порядке, получим новую бесконечную десятичную дробь, отвечающую некоторому числу x_1 . Переставив в десятичной записи числа x_1 цифры со 2-й по 6-ю после запятой, получим десятичную запись числа x_2 . Вообще, десятичная запись числа x_{k+1} получается перестановкой цифр в записи x_k с $(k+1)$ -й по $(k+5)$ -ю после запятой.

а) Докажите, что как бы ни переставлять цифры на каждом шаге, получающаяся последовательность чисел x_k всегда имеет некоторый предел.

Обозначим этот предел через y .

б) Выясните, можно ли с помощью такого процесса из рационального числа x получить иррациональное число y .

в) Придумайте такую дробь x , для которой описанный процесс всегда приводит к иррациональным числам y , каковы бы ни были перестановки пятерок цифр на каждом шаге.

15-я Всесоюзная олимпиада, 1981 г. (Алма-Ата)

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	304	305	306	307	315	316	317	318
9	308	307	309	310	319	320	321	322
10	311	312	313	314	323	324	325	326

304. Две одинаковые шахматные доски (8×8 клеток) имеют общий центр, причем одна из них повернута относительно другой на 45° около центра. Найдите суммарную площадь всех пересечений черных клеток этих двух досок, если площадь одной клетки равна 1.

305. На окружности даны точки A , B , M и N . Из точки M проведены хорды MA_1 и MB_1 перпендикулярные прямым NB и NA соответственно. Докажите, что прямые AA_1 и BB_1 параллельны.

306. Будем говорить, что число обладает свойством $P(k)$, если оно разлагается в произведение k последовательных натуральных чисел, больших 1.

а) Найдите k такое, для которого некоторое число N обладает одновременно свойствами $P(k)$ и $P(k+2)$.

б) Докажите, что чисел, обладающих одновременно свойствами $P(2)$ и $P(4)$, не существует.

307. В таблице 4 строки. В первой из них записаны произвольные натуральные числа, среди которых могут быть и одинаковые. Вторая строка заполняется так: слева направо просматриваются числа первой строки и под числом a записывается число k , если a встретилось в первой строке в k -й раз. Аналогично по второй строке записывается третья, а по третьей – четвертая.

Докажите, что вторая и четвертая строки всегда получаются одинаковыми.

308. Задано число a . Найдите наименьшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат Ox и Oy и содержащего фигуру, определяемую системой неравенств

$$\begin{cases} y \leq -x^2, \\ y \geq x^2 - 2x + a. \end{cases}$$

309. Правильные треугольники ABC , CDE и ENK (вершины указаны против часовой стрелки) с попарно общими вершинами C и E расположены на плоскости так, что $\overline{AD} = \overline{DK}$. Докажите, что треугольник BHD тоже правильный.

310. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка.

Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка.

311. Про числа a и b известно, что неравенство

$$a \cos x + b \cos 3x > 1$$

не имеет решений. Докажите, что $|b| \leq 1$.

312. Точки K и M – середины сторон AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$, точки L и N расположены на двух других сторонах так, что $KLMN$ – прямоугольник. Докажите, что площадь четырехугольника $ABCD$ вдвое больше площади прямоугольника $KLMN$.

313*. Найдите все последовательности натуральных чисел (a_n) такие, что выполнены следующие два условия:

а) при любом n $a_n \leq n\sqrt{n}$;

б) при любых различных m и n разность $a_m - a_n$ делится на $m - n$.

314*. Можно ли все клетки какой-нибудь прямоугольной таблицы окрасить в белый и черный цвета так, чтобы белых и

черных клеток было поровну, а в каждой строке и в каждом столбце было более $3/4$ клеток одного цвета?

315. Докажите, что если четырехугольники $ACPH$, $AMBE$, $АНВТ$, $BKXM$, $СКХР$ суть параллелограммы, то и четырехугольник $ABTE$ – параллелограмм (вершины всех четырехугольников перечислены против часовой стрелки).

316. Решите уравнение

$$x^3 - y^3 = xy + 61$$

в натуральных числах x , y .

317. В футбольном турнире 18 команд сыграли между собой 8 туров – каждая команда сыграла с восемью разными командами. Докажите, что найдутся три команды, не сыгравшие между собой пока ни одного матча.

318. Точки C_1 , A_1 , B_1 взяты соответственно на сторонах AB , BC и CA треугольника ABC так, что

$$AC_1 : C_1B = BA_1 : A_1C = CB_1 : B_1A = 1/3.$$

Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр p треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами

$$\frac{1}{2}P < p < \frac{3}{4}P.$$

319. Докажите, что если положительные числа x , y удовлетворяют уравнению $x^3 + y^3 = x - y$, то $x^2 + y^2 < 1$.

320. Ученику нужно скопировать выпуклый многоугольник, помещающийся в круге радиуса 1. Сначала ученик отложил первую сторону, из ее конца провел вторую, из конца второй – третью и т.д. Закончив построение, он обнаружил, что многоугольник не замкнулся, а первая и последняя нарисованные им вершины удалены на расстояние d одна от другой. Известно, что углы ученик откладывал точно, а относительная погрешность при откладывании длины каждой стороны не превышала числа p . Докажите, что $d \leq 4p$.

321. В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным на одном (любом) ребре, прибавля-

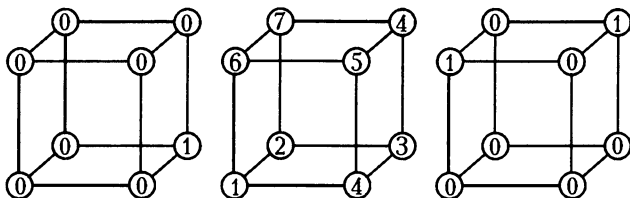


Рис. 4

ется по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел равными между собой, если вначале были поставлены числа, как на рисунке 4,а; как на рисунке 4,б; как на рисунке 4,в?

322. Найдите хотя бы одно натуральное число n такое, что каждое из чисел $n, n + 1, n + 2, \dots, n + 20$ имеет с числом $30030 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$ общий делитель, больший единицы.

323. Натуральные числа от 100 до 999 написаны каждое на своей карточке. Карточки положены на стол числами вниз, перемешаны и сложены затем в одну стопку. Будем, открывая последовательно карточки из этой стопки, сортировать их, раскладывая на кучки числами вверх в соответствии с младшей цифрой написанного числа. В первой кучке окажутся все числа, оканчивающиеся на 0, во второй – оканчивающиеся на 1 и т.д. Сложим все кучки в одну стопку, положив поверх первой кучки вторую, затем третью и в конце концов десятую. Получившуюся стопку карточек перевернем и рассортируем еще раз, но теперь, открывая карточки, будем раскладывать их на кучки в соответствии со второй цифрой. Сложим опять получившиеся кучки в одну стопку, как указано раньше (по возрастанию второй цифры) и рассортируем их в последний раз, раскладывая и собирая кучки уже в соответствии со старшими цифрами. В каком порядке будут расположены карточки в стопке, полученной после этой сортировки?

324. В прямоугольнике 3×4 см расположено 6 точек. Докажите, что найдется пара точек, удаленных одна от другой не более чем на $\sqrt{5}$ см.

325. а) Найдите наименьшее возможное значение многочлена

$$P(x, y) = 4 + x^2y^4 + x^4y^2 - 3x^2y^2.$$

б) Докажите, что этот многочлен нельзя представить в виде суммы квадратов многочленов от переменных x, y .

326. Отрезки AD, BE, CF служат боковыми ребрами правильной треугольной призмы. На ее основании ABC найдите все точки, равноудаленные от прямых AE, BF, CD .

16-я Всесоюзная олимпиада, 1982 г. (Одесса)

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	327	328	329а	330	337	338	339	340
9	331	332	333	334	341	342	343	344
10	335	332	329б	336	345	346	347	348

327. На окружности с центром O_1 радиуса r_1 взяты точки M и K . В центральный угол MO_1K вписана окружность с центром O_2 радиуса r_2 . Найдите площадь четырехугольника MO_1KO_2 .

328. В числовых последовательностях (a_n) и (b_n) каждый член, начиная с третьего, равен сумме двух предыдущих, причем $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и $b_1 = 2$, $b_2 = 1$. Сколько существует чисел, встречающихся как в первой, так и во второй последовательностях?

329. а) Пусть m и n – натуральные числа. Докажите, что если для некоторых неотрицательных целых чисел k_1, k_2, \dots, k_n число $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$ делится на $2^m - 1$, то $n \geq m$.

б) Существует ли натуральное число, делящееся на $\underbrace{111\dots 1}_m$ и имеющее сумму цифр, меньшую чем m ?

330. Каждой вершине куба поставлено в соответствие некоторое неотрицательное действительное число, причем сумма всех этих чисел равна 1. Двое играют в следующую игру. Первый выбирает любую грань куба, второй выбирает другую грань и, наконец, первый выбирает третью грань куба. При этом выбирать грани, параллельные уже выбранным, нельзя. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы число, соответствующее общей вершине трех выбранных граней, не превосходило $1/6$.

331. Однажды трое мальчиков встретились в библиотеке. Один из них сказал: «Теперь я буду ходить в библиотеку через день». Второй заявил, что он будет ходить в библиотеку через два дня, а третий – что будет ходить в библиотеку через три дня. Слышавший их разговор библиотекарь заметил, что по средам в библиотеке выходной день. Мальчики ответили, что если у кого-нибудь из них дата прихода попадет на выходной день библиотеки, то он придет на следующий день и дальнейший отсчет посещений будет вести уже с этого дня. Так мальчики и поступили. Однажды в понедельник они вновь все вместе встретились в библиотеке. В какой день недели происходил описанный выше разговор?

332. В параллелограмме $ABCD$, отличном от ромба, дано отношение длин диагоналей: $AC : BD = k$. Пусть луч AM симметричен лучу AD относительно прямой AC , луч BM симметричен лучу BC относительно прямой BD , M – общая точка лучей AM и BM . Найдите отношение $AM : BM$.

333*. На окружности отмечено $3k$ точек, разделяющих ее на $3k$ дуг, из которых k дуг имеют длину 1, еще k дуг – длину 2 и

остальные k дуг – длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные.

334. Внутри тетраэдра выбрана точка M . Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из точки M под углом, косинус которого не больше чем $-1/3$.

335. Числа a, b, c лежат на интервале $(0; \pi/2)$ и удовлетворяют равенствам: $\cos a = a$, $\sin \cos b = b$, $\cos \sin c = c$. Расположите эти числа в порядке возрастания.

336. Замкнутая ломаная M имеет нечетное число вершин – последовательно $A_1, A_2, \dots, A_{2n+1}$. Обозначим через $S(M)$ новую замкнутую ломаную, последовательные вершины $B_1, B_2, \dots, B_{2n+1}$ которой являются серединами звеньев ломаной M : B_1 – середина отрезка A_1A_2 , B_2 – середина A_3A_4, \dots, B_{n+1} – середина $A_{2n+1}A_1$, B_{n+2} – середина A_2A_3, \dots, B_{2n+1} – середина $A_{2n}A_{2n+1}$. Докажите, что в последовательности построенных таким образом ломаных

$$M_1 = S(M), M_2 = S(M_1), M_3 = S(M_2), \dots, M_k = S(M_{k-1})$$

найдется замкнутая ломаная, гомотетичная исходной ломаной M .

337. Натуральные числа от 1 до 1982 расположены одно за другим в некотором порядке. ЭВМ просматривает слева направо пары стоящих рядом чисел (первое и второе, второе и третье и т.д.) вплоть до последней и меняет местами числа в просматриваемой паре, если большее из них стоит левее. Затем она просматривает все пары, двигаясь справа налево от последней пары до первой, меняя местами числа в парах по тому же закону. По окончании этого просмотра работающий с ЭВМ оператор получил информацию, что число, стоящее на сотом месте, оба раза не сдвинулось со своего места. Найдите это число.

338. Огурцовая река, протекающая в Цветочном городе, в районе пристани имеет несколько островов, общий периметр которых равен 8 метрам. Знайка утверждает, что можно отчалить на лодке от пристани и переправиться на другой берег, проплыв менее 3 метров. Берега реки в районе пристани параллельны, а ширина ее равна 1 м. Прав ли Знайка?

339. На координатной плоскости Oxy нарисовали график функции $y = x^2$. Потом оси координат стерли – осталась только парабола. Как при помощи циркуля и линейки восстановить оси координат и единицу длины?

340. Квадратная таблица $n \times n$ клеток заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся одно от другого не больше чем на 1.

Докажите, что хотя бы одно число встречается в таблице:

- а) не менее чем $\lfloor n/2 \rfloor$ раз ($\lfloor a \rfloor$ – целая часть числа a);
- б) не менее чем n раз.

341. Докажите, что для всех положительных значений x выполнено неравенство

$$2^{\sqrt[3]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

342. Какое наименьшее количество чисел нужно вычеркнуть из совокупности чисел 1, 2, 3, ..., 1982 так, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других из оставшихся чисел? Каким образом это можно сделать?

343. В каждой клетке бесконечного листа клетчатой бумаги написано какое-то действительное число. Докажите, что в некоторой клетке написано число, не превосходящее чисел, написанных по крайней мере в четырех из восьми окружающих ее клеток.

344*. Докажите, что из любой последовательности действительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n можно выбрать часть чисел так, чтобы выполнялись следующие три условия:

- а) никакие идущие подряд три числа не выбраны;
- б) из каждых трех идущих подряд чисел хотя бы одно выбрано;
- в) модуль суммы выбранных чисел не меньше, чем

$$\frac{|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|}{6}.$$

345. В квадратной таблице $n \times n$ клеток отмечена $n - 1$ клетка. Докажите, что перестановками строк между собой и столбцов между собой можно добиться того, чтобы все отмеченные клетки лежали ниже диагонали таблицы.

346. Докажите, что для любого натурального числа n и любого действительного числа a справедливо неравенство

$$|a||a-1||a-2|\dots|a-n| \geq \langle a \rangle \frac{n!}{2^n},$$

где $\langle a \rangle$ – расстояние от числа a до ближайшего к нему целого числа, $n! = 1, 2, \dots, n$.

347. а) Существуют ли многочлены

$$P = P(x, y, z), Q = Q(x, y, z), R = R(x, y, z)$$

от переменных x, y, z такие, что выполнено тождество

$$(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - 2x + 1)^3 R = 1?$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x - y + 1)^3 P + (y - z - 1)^3 Q + (z - x + 1)^3 R = 1.$$

348*. Вершины тетраэдра $KLMN$ лежат внутри, на гранях или на ребрах другого тетраэдра $ABCD$. Докажите, что сумма длин всех ребер тетраэдра $KLMN$ меньше $4/3$ суммы длин всех ребер тетраэдра $ABCD$.

**17-я Всесоюзная олимпиада,
1983 г. (Кишинев)**

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	349	350	351	352	360	361	362	363
9	353	354	355	356	364	365	366	367
10	357	354	358	359	360	368	369	370

349. В сетке, изображенной на рисунке 5, каждая ячейка имеет размер 1×1 . Можно ли эту сетку представить в виде объединения следующих множеств: а) восьми ломаных, каждая из которых имеет длину 5; б) пяти ломаных, каждая из которых имеет длину 8?

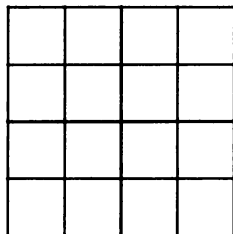


Рис. 5

350. На доске написали три целых числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух других оставшихся чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли на доске первоначально быть записаны числа: а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3?

351. Три круга попарно касались друг друга внешним образом в точках X , Y , Z . Затем радиусы этих кругов увеличили более чем в $2/\sqrt{3}$ раз, сохраняя центры. Докажите, что каждая точка треугольника XYZ оказалась накрытой хотя бы одним из увеличенных кругов.

352. Даны несколько различных натуральных чисел, заключенных между квадратами двух последовательных натуральных чисел. Докажите, что все их попарные произведения также различны.

353. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} y^2 = x^3 - 3x^2 + 2x, \\ x^2 = y^3 - 3y^2 + 2y. \end{cases}$$

354. Натуральное число k в десятичной записи имеет n знаков. Это число округлили с точностью до десятков, заменив

последнюю цифру нулем и увеличив на единицу число десятков, если эта последняя цифра была больше четырех. Полученное число аналогичным образом округлили с точностью до сотен и так далее. В результате последнего $(n - 1)$ -го округления получилось число \tilde{k} . Докажите, что $\tilde{k} < 18k/3$.

355. В треугольнике ABC точка D является серединой стороны AB , точки E и F лежат на отрезках AC и BC соответственно. Докажите, что площадь треугольника DEF не превосходит суммы площадей треугольников ADE и BDF .

356. Будут ли периодическими последовательности (α_n) и (β_n) , состоящие соответственно из последних цифр целых чисел $\left[(\sqrt{10})^n\right]$ и $\left[(\sqrt{2})^n\right]$? (Здесь $[x]$ – целая часть числа x .)

357. Величины α и β двух острых углов удовлетворяют равенству $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$. Докажите, что $\alpha + \beta = \pi/2$.

358. Вершины тетраэдра $ABCD$ ортогонально спроектированы на две плоскости. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 и A_2, B_2, C_2, D_2 – проекции соответствующих вершин. Докажите, что одну из плоскостей можно переместить в пространстве так, чтобы прямые $A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2$ стали параллельными.

359*. Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Решив очередное квадратное уравнение и убедившись в том, что у него имеется два корня, он составляет следующее уравнение по правилу: свободный член равен большему корню, коэффициент при переменной x равен меньшему корню, коэффициент при x^2 равен единице. Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго. Каково наибольшее число уравнений, которое ему, возможно, придется решить?

360. Натуральные числа m, n, k таковы, что число m^n делится на n^m , а число n^k делится на k^n . Докажите, что число m^k делится на k^m .

361. В языке племени Абба две буквы. Известно, что никакое слово этого языка не является началом другого слова. Может ли словарь языка этого племени содержать 3 четырехбуквенных, 10 пятибуквенных, 30 шестибуквенных и 5 семибуквенных слов?

362. Можно ли в клетках бесконечного клетчатого листа бумаги расставить целые числа так, чтобы в каждом прямоугольнике размерами 4×6 клеток, стороны которого идут по линиям бумаги, сумма чисел была а) 10; б) 1?

363. Все четыре треугольника, заштрихованные на рисунке 6, равновелики. Докажите, что три четырехугольника, не за-

штрихованные на нем, также равновелики. Чему равна площадь одного четырехугольника, если площадь одного треугольника равна 1 см^2 ?

364. Группа детского сада построилась парами друг за другом. При этом оказалось, что в каждой колонне стоит поровну мальчиков и девочек, а число пар, в которых стоят девочка и мальчик, равно числу остальных пар. Докажите, что число детей в группе делится на 8.

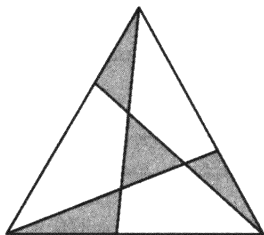


Рис. 6

365. Длины двух параллельных сторон прямоугольника равны 1 см. Кроме того, известно, что двумя перпендикулярными прямыми он может быть разбит на четыре прямоугольника, три из которых имеют площадь, не меньшую 1 см^2 , а четвертый — не меньшую 2 см^2 . При какой минимальной длине двух других сторон прямоугольника это возможно?

366. Внутри треугольника ABC выбрана произвольная точка O . Докажите, что справедливо равенство

$$S_A \cdot \overrightarrow{OA} + S_B \cdot \overrightarrow{OB} + S_C \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0},$$

где S_A , S_B , S_C — площади треугольников BCO , CAO , ABO соответственно.

367. Докажите, что среди любых $2m + 1$ различных целых чисел, не превосходящих по модулю $2m - 1$, можно найти три числа, сумма которых равна 0.

368. На сторонах AB , BC , CA треугольника ABC (но не в вершинах) выбраны точки D , E , F соответственно. Обозначим через d_0 , d_1 , d_2 , d_3 длины наибольших сторон треугольников

DEF , ADF , BDE , CEP . Докажите, что $d_0 \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \min(d_1, d_2, d_3)$. В каких случаях имеет место равенство?

369. Множество M состоит из k попарно не пересекающихся отрезков, лежащих на одной прямой. Известно, что любой отрезок длины не большей 1 можно расположить на прямой так, чтобы концы его принадлежали множеству M . Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M , не меньше $1/k$.

370*. В бесконечном десятичном разложении действительного числа a встречаются все цифры. Пусть v_n — количество различных цифровых отрезков длины n , встречающихся в этом разложении. Докажите, что если для некоторого n выполнено условие $v_n \leq n + 8$, то число a рационально.

**18-я Всесоюзная олимпиада,
1984 г. (Ашхабад)**

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	371	372	373	374	383	384	385	386
9	375	376	377	378	387	388	389	390
10	379	380	381	382	391	392	393	394

371. а) Произведение некоторых целых n чисел равно n , а сумма их равна нулю. Докажите, что число n делится на 4.

б) Пусть n – натуральное число, делящееся на 4. Докажите, что найдутся n целых чисел, произведение которых равно n , а сумма равна нулю.

372. Докажите, что для любых неотрицательных чисел a и b справедливо неравенство

$$\frac{1}{2}(a+b)^2 + \frac{1}{4}(a+b) \geq a\sqrt{b} + b\sqrt{a}.$$

373. На плоскости расположены два равносторонних треугольника $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$, вершины которых занумерованы по часовой стрелке. Из произвольной точки O отложены векторы \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , равные соответственно векторам $\overrightarrow{A_1A_2}$, $\overrightarrow{B_1B_2}$, $\overrightarrow{C_1C_2}$. Докажите, что точки A , B , C также являются вершинами равностороннего треугольника.

374. Имеются четыре краски и бесконечно много квадратных плиточек со стороной длины 1. Разрешается окрашивать стороны плиточек так, чтобы цвета всех сторон у каждой плиточки были разные, и приклеивать плиточки друг к другу сторонами одного цвета. Для каких чисел m и n из этих плиточек можно склеить прямоугольник размера $m \times n$, у которого каждая сторона покрашена одним цветом и цвета всех сторон разные?

375. Докажите, что при всех действительных $x > 0$, $y > 0$ и при всех действительных α справедливо неравенство

$$x^{\sin^2 \alpha} \cdot y^{\cos^2 \alpha} < x + y.$$

376. Имеется куб и две краски: красная и зеленая. Двое играют в такую игру. Начинаящий выбирает 3 ребра куба и красит их в красный цвет. Его партнер выбирает 3 ребра из тех, что еще не покрашены, и красит их в зеленый цвет. После этого снова 3 ребра в красный цвет красит начинающий, а затем 3 ребра в зеленый цвет – его партнер. Запрещается перекрашивать ребро в другой цвет или красить дважды одинаковой краской.

Выигрывает тот, кто первым сумеет покрасить своей краской все ребра какой-нибудь грани. Верно ли, что начинающий при правильной игре обязательно выигрывает?

377. По кругу записаны $n \geq 3$ натуральных чисел так, что для каждого числа отношение суммы его соседей к нему является натуральным числом. Докажите, что сумма всех таких отношений: а) не меньше $2n$; б*) меньше $3n$.

378. Окружность с центром в точке O , вписанная в треугольник ABC , касается его сторон BC , AC , AB соответственно в точках A_1 , B_1 , C_1 . Отрезки AO , BO , CO пересекают окружность соответственно в точках A_2 , B_2 , C_2 . Докажите, что прямые A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 пересекаются в одной точке.

379. При каких целых m и n выполняется равенство

$$(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n ?$$

380. В строку в возрастающем порядке выписали n различных действительных чисел. Под ними во вторую строку выписали те же числа, только, быть может, в другом порядке. Для каждой пары чисел, выписанных одно под другим, вычислили сумму. Эти суммы образовали третью строку. Оказалось, что числа в третьей строке также расположены в возрастающем порядке. Докажите, что первая строка совпадает со второй.

381. Дан треугольник ABC . Через точку P провели прямые PA , PB , PC , которые пересекли описанную около этого треугольника окружность в точках A_1 , B_1 , C_1 , отличных от вершин треугольника. Оказалось при этом, что треугольник $A_1B_1C_1$ равен треугольнику ABC . Докажите, что существует не более восьми точек P с указанным свойством.

382. Положительные числа x , y , z удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25, \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9, \\ z^2 + zx + x^2 = 16. \end{cases}$$

Вычислите величину $xy + 2yz + 3zx$.

383. Учитель написал на доске квадратный трехчлен $x^2 + 10x + 20$, после чего по очереди каждый из учеников увеличил или уменьшил на единицу либо коэффициент при x , либо свободный член, но не оба сразу. В результате на доске оказался написан квадратный трехчлен $x^2 + 20x + 10$. Верно ли, что в

некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен с целыми корнями?

384. Монету радиуса r перемещают по плоскости так, что ее центр обходит контур выпуклого многоугольника, описанного около круга радиуса $R > r$ и имеющего периметр P . Найдите площадь фигуры, образованной следом монеты (многоугольного кольца).

385. Имеется $n + 1$ гирь общим весом $2n$ и весы с двумя чашками, находящиеся в равновесии. Вес каждой из гирь выражается натуральным числом. Гири по очереди кладут на чашки весов: сначала самую тяжелую (или одну из самых тяжелых), затем самую тяжелую из оставшихся и т.д. При этом каждую следующую гирю кладут на ту чашку весов, которая в данный момент легче, а если весы находятся в равновесии, то на любую из чашек. Докажите, что после того, как на весах окажутся все гири, весы будут находиться в равновесии.

386. Назовем натуральное число абсолютно простым, если оно простое и если при любой перестановке его цифр снова получается простое число. Докажите, что в записи абсолютно простого числа не может содержаться более трех различных цифр.

387. Цифры $x \neq 0$ и y таковы, что при любом $n \geq 1$ число $\underbrace{xx \dots x}_n 6 \underbrace{yy \dots y}_n 4$ является квадратом некоторого целого числа. Найдите все такие x и y .

388. На прямой взяты четыре различные точки, обозначенные в порядке следования буквами A, B, C, D . Докажите, что для любой точки E , не лежащей на прямой AD , справедливо неравенство

$$AE + ED + |AB - CD| > BE + CE.$$

389. Последовательность x_n задана рекуррентным образом: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_{n+2} = x_{n+1}^2 - \frac{1}{2}x_n$, если $n \geq 1$. Докажите, что последовательность x_n имеет предел, и найдите его.

390*. В белых клетках шахматной доски размером 1983×1984 записаны числа 1 или -1 так, что для любой черной клетки произведение чисел, стоящих в соседних с ней белых клетках, равно 1. Докажите, что это возможно только в том случае, если все записанные числа равны 1.

391. В клетках квадратной таблицы 3×3 записаны числа 1 или -1 . Для каждой клетки таблицы вычислим произведение чисел, стоящих в соседних с ней клетках (соседними называются клетки, имеющие общую сторону). После этого впишем вычис-

ленные произведения в клетки таблицы вместо стоявших там ранее чисел, с новой таблицей проделаем ту же операцию и т.д. Докажите, что после некоторого числа таких операций в таблице будут записаны одни единицы.

392. Какое из чисел больше:

$$\frac{2}{201} \text{ или } \ln \frac{101}{100} ?$$

393. На плоскости расположены три окружности c_1, c_2, c_3 с центрами C_1, C_2, C_3 и радиусами r_1, r_2, r_3 соответственно, причем каждая лежит вне двух других, $r_1 > r_2; r_1 > r_3$, A – точка пересечения внешних касательных к окружностям c_1 и c_2 – лежит вне окружности c_3 , B – точка пересечения внешних касательных к окружностям c_1 и c_3 – лежит вне окружности c_2 . Из точки A проведены касательные к окружности c_3 , из точки B – к окружности c_2 . Докажите, что эти две пары касательных, пересекаясь, образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность. Вычислите радиус этой окружности.

394. Докажите, что любое сечение куба плоскостью, проходящей через центр куба, имеет площадь, не меньшую площади грани куба.

19-я Всесоюзная олимпиада, 1985 г. (Могилев)

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	395	396	397	398	407	408	409	410
9	399	400	401	402	411	410	412	413
10	403	404	405	406	414	415	416	417

395. В остроугольном треугольнике из середины каждой стороны опущены перпендикуляры на две другие стороны. Докажите, что площадь шестиугольника, ограниченного этими перпендикулярами, равна половине площади треугольника.

396. Существует ли натуральное число n , обладающее следующим свойством: сумма цифр числа n (в десятичной записи) равна 1000, а сумма цифр числа n^2 равна 1000^2 ?

397. Какое наибольшее число дамек можно расставить на шашечной доске 8×8 клеток так, чтобы каждая дамка билась хотя бы одной другой дамкой?

398. В правильном n -угольнике требуется покрасить каждую сторону и каждую диагональ каким-либо цветом так, чтобы любые два из этих отрезков, имеющие общую точку, были

окрашены различно. Какое наименьшее количество цветов для этого необходимо?

399. На плоскости дана прямая l , точка O , не лежащая на этой прямой, и произвольная точка A . Докажите, что точку O можно перевести в точку A , используя только симметрии относительно прямой l и повороты с центром в точке O .

400. В каком наибольшем числе различных целых точек квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$, у которого $a > 100$, может принимать значения, по модулю не превосходящие 50?

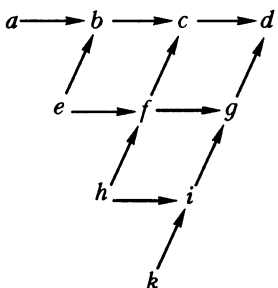


Рис. 7

401. Различные натуральные числа a, b, \dots, k записаны в виде таблицы (рис. 7). Известно, что каждое число, к которому на рисунке ведут две стрелочки, равно сумме чисел, стоящих у начала этих стрелочек. При каком наименьшем d возможно такое расположение?

402*. Дана строго возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел a_1, a_2, \dots . Докажите:

а) что существует номер k_0 такой, что для всех $k \geq k_0$ справедливо неравенство

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1;$$

б) что для всех достаточно больших номеров k справедливо неравенство

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}} < k - 1985.$$

403. Укажите все пары чисел (x, y) , для которых

$$|\sin x - \sin y| + \sin x \cdot \sin y \leq 0.$$

404. На плоскости нарисован выпуклый пятиугольник $ABCDE$. Построим точку A_1 , симметричную точке A относительно точки B , точку B_1 , симметричную точке B относительно C , ..., точку E_1 , симметричную точке E относительно точки A , и после этого сотрем пятиугольник $ABCDE$. Докажите, что при помощи циркуля и линейки, зная расположение точек A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 , можно восстановить пятиугольник $ABCDE$.

405. Последовательность a_1, a_2, a_3, \dots задается правилами: $a_{2n} = a_n$ при $n \geq 1$ и $a_{4n+1} = 1$, $a_{4n+3} = 0$ при $n \geq 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.

406*. На плоскости проведено n прямых ($n > 2$), делящих плоскость на несколько областей. Некоторые из этих областей окрашены, причем никакие две окрашенные области не могут соприкасаться по границе. Докажите, что число окрашенных областей не превосходит $\frac{1}{3}(n^2 + n)$.

407. Имеется куб, кубическая коробка с крышкой тех же размеров и шесть красок. Каждой краской окрашивается одна грань куба и одна из граней коробки. Докажите, что куб можно таким образом положить в коробку, чтобы каждая грань куба прилегла к грани коробки, окрашенной другим цветом.

408. Диаметр A_0A_5 делит окружность с центром в точке O на две полуокружности. Одна из них разделена на пять равных дуг A_0A_1 , A_1A_2 , A_2A_3 , A_3A_4 , A_4A_5 . Прямая A_1A_4 пересекает OA_2 и OA_3 в точках M и N . Докажите, что сумма длин отрезков A_2A_3 и MN равна радиусу окружности.

409. Ученики школьного математического кружка смастерили вычислительную машину, которая четверку чисел (a, b, c, d) нажатием кнопки превращает в четверку $(a - b, b - c, c - d, d - a)$. Докажите, что если в исходной четверке не все числа равны, то после некоторого числа нажатий кнопки получится четверка, хотя бы одно из чисел которой больше 1985.

410. Числа $1, 2, 3, \dots, 2n - 1, 2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — числа первой группы, записанные в возрастающем порядке, и $b_1 > b_2 > \dots > b_n$ — числа второй группы в убывающем порядке. Докажите, что

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_n - b_n| = n^2.$$

411. Из одинаковых кубиков составлен параллелепипед. Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, покрасили. Оказалось, что у половины всех кубиков окрашена хотя бы одна грань. У скольких кубиков имеются окрашенные грани?

412. Одна из двух окружностей радиуса R проходит через вершины A и B , а другая — через вершины B и C параллелограмма $ABCD$. Докажите, что если M — вторая точка пересечения этих окружностей, то радиус окружности, описанной около треугольника AMD , равен R .

413*. Правильный шестиугольник разбит на 24 треугольника. Во всех 19 узлах фигуры, показанной на рисунке 8, записаны различные числа. Дока-

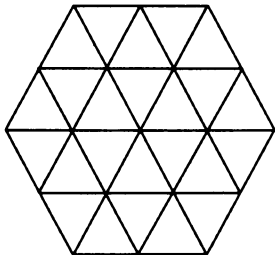


Рис. 8

жите, что среди 24 треугольников разбиения имеется по крайней мере 7 треугольников, в вершинах которых тройки чисел записаны в порядке возрастания, если мы будем считать против часовой стрелки.

414. Решите уравнение

$$\frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{2 + \frac{x}{1 + \sqrt{1+x}}}}} = 1$$

(в записи выражения, стоящего слева, фигурирует 1985 двоек).

415. Из правильного пятиугольника со стороной 1 см удалены все точки, отстоящие от всех вершин пятиугольника на расстояние меньшее 1 см. Найдите площадь оставшейся части.

416. На бесконечном клетчатом листе со стороной клетки 1 разрешается делать разрезы только по линиям сетки. Докажите, что при любом целом $m > 12$ можно вырезать прямоугольник площади большей m , из которого нельзя вырезать прямоугольник площади m .

417. Длины ребер куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равны 1 см. Найдите наименьшее расстояние между точками окружностей, одна из которых вписана в основание куба $ABCD$, а вторая проходит через вершины A , C и B_1 .

20-я Всесоюзная олимпиада, 1986 г. (Ульяновск)

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	418	419	420	421	430	431	432	433
9	422	423	424	425	434	4336	435	436
10	426	427	428	429	437	438	439	440

418. Корни уравнения $x^2 + ax + b + 1 = 0$ являются натуральными числами. Докажите, что $a^2 + b^2$ — составное число.

419. Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, а другого — красные. Докажите, что сумма длин синих сторон восьмиугольника равна сумме длин его красных сторон.

420. Точка M лежит на стороне AC остроугольного треугольника ABC . Вокруг треугольников ABM и BCM описыва-

ются окружности. При каком положении точки M площадь общей части ограничиваемых ими кругов будет наименьшей?

421. В одном государстве король хочет построить n городов и $n - 1$ дорогу между ними так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой. (Каждая дорога соединяет два города, дороги не пересекаются и не проходят через другие города.) Король хочет, чтобы кратчайшие расстояния по сети дорог между парами городов равнялись соответственно $1, 2, 3, \dots$

$\dots, \frac{n(n-1)}{2}$ км. Возможно ли это, если а) $n = 6$; б*) $n = 1986$?

422. Докажите, что на координатной плоскости нельзя нарисовать выпуклый четырехугольник, у которого одна диагональ вдвое длиннее другой, угол между диагоналями равен 45° , а координаты каждой вершины являются целыми числами.

423. Докажите, что прямоугольную таблицу размером $m \times n$ клеток можно заполнить квадратами различных натуральных чисел так, чтобы суммы чисел в каждой строке и каждом столбце были также квадратами натуральных чисел.

424. Две окружности, расстояние между центрами которых равно d , пересекаются в точках P и Q . Через точки P , Q и точку A первой окружности (отличную от P и Q) проведены прямые, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. а) Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC , равен d . б) Какое множество точек образуют центры окружностей, описанных около треугольника ABC , если точка A пробегает первую окружность?

425*. На плоскости дан правильный шестиугольник. Каждая его сторона разделена на 1000 равных частей, и точки деления соединены отрезками, параллельными сторонам шестиугольника. Выберем какие-либо три узла получившейся сетки, являющиеся вершинами правильного треугольника (любого размера и расположения), и окрасим их. Будем продолжать окрашивать таким способом тройки узлов до тех пор, пока это возможно. Докажите, что если неокрашенным останется один узел, то он не может быть вершиной исходного шестиугольника.

426. Найдите все натуральные числа, каждое из которых равно квадрату числа всех своих делителей.

427. Докажите, что для любых положительных чисел a_1, a_2, \dots, a_n выполнено неравенство

$$\frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_1 + a_2} + \dots + \frac{n}{a_1 + \dots + a_n} < 4 \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right).$$

428. Через вершину A треугольника ABC , в котором $AB \neq AC$, проводятся различные прямые. Докажите, что любая из них может содержать не более одной точки M , отличной от вершин треугольника и удовлетворяющей условию $\angle ABM = \angle ACM$. Определите, какие из рассматриваемых прямых не содержат ни одной такой точки.

429. Куб с ребром длины n , $n \geq 3$, состоит из n^3 единичных кубиков. Докажите, что в каждом из этих кубиков можно записать по целому числу так, чтобы все n^3 чисел были различными, а суммы чисел в любом ряду, параллельном какому-либо ребру куба, равнялись нулю.

430. Десятичная запись натурального числа a состоит из n одинаковых цифр x , числа b — из n одинаковых цифр y , а числа c — из $2n$ одинаковых цифр z . Для любого $n \geq 2$ найдите все такие цифры x, y, z , для которых $a^2 + b = c$.

431. Внутри выпуклого двенадцатиугольника даны две точки, расположенные на расстоянии 10 см друг от друга. Для каждой из этих точек нашли сумму расстояний от нее до вершин двенадцатиугольника. Докажите, что полученные суммы различаются менее чем на 1 м.

432. Молоко разлито по 30 стаканам. Мальчик пытается добиться, чтобы во всех стаканах молока стало поровну. Для этого он берет любые два стакана и отливает молоко из одного в другой до тех пор, пока количество молока в них не уравнивается. Можно ли разлить молоко по стаканам так, чтобы мальчик не смог добиться своей цели, сколь бы долго он ни занимался переливанием?

433. Некоторый прямоугольник разделен прямыми, параллельными сторонами, на квадраты со стороной 1, которые раскрашены в шахматном порядке в белый и черный цвет. Диагональ прямоугольника разбилась на белые и черные отрезки. Найдите отношение суммы длин белых отрезков к сумме длин черных отрезков, если размер прямоугольника а) 100×99 ; б) 101×99 .

434. На плоскости дан правильный n -угольник $A_1A_2 \dots A_n$. а) Докажите, что если n — четное число, то для произвольной точки M плоскости в выражении $\pm MA_1 \pm MA_2 \dots \pm MA_n$ можно так выбрать знаки плюс и минус, что полученная сумма будет равна 0. б) Докажите, что если n — нечетное число, то указанное выражение с помощью выбора знаков плюс и минус можно обратить в 0 только для конечного числа точек M плоскости.

435. Клетки квадратной таблицы размером $n \times n$ ($n \geq 3$) заполняются числами ± 1 по следующим правилам:

1) во все граничные клетки таблицы помещаются числа -1 ;
 2) число, помещаемое в очередную незаполненную клетку таблицы – ее можно выбирать произвольно, – равно произведению ближайших к этой клетке чисел, расположенных по разные стороны от нее, в одной строке с ней или в одном столбце с ней. Так делается до тех пор, пока все пустые клетки таблицы не будут заполнены. Какое а) наибольшее; б) наименьшее количество $+1$ может получиться в таблице?

436. Докажите, что для каждого натурального n справедливо неравенство

$$|\sin 1| + |\sin 2| + \dots + |\sin (3n - 1)| + |\sin 3n| > 8n/5.$$

437. Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{mn}$, где m, n – натуральные числа и $1 \leq m < n \leq 1986$, не является целым числом.

438. Около окружности радиуса 1 описаны квадрат и треугольник. Докажите, что площадь общей части квадрата и треугольника больше 3,4. Можно ли утверждать, что эта площадь больше 3,5?

439*. Многочлен $P(x)$ назовем допустимым, если все его коэффициенты равны 0, 1, 2 или 3. Для данного натурального n найдите число всех допустимых многочленов, удовлетворяющих условию $P(2) = n$.

440*. Рассмотрим все тетраэдры $AXB Y$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов пространственного четырехугольника $AXB Y$, т.е. величина

$$\angle AXB + \angle XBY + \angle BYA + \angle YAX,$$

не зависит от выбора точек X и Y .

21-я Всесоюзная олимпиада, 1987 г. (Фрунзе)

Класс	Задачи							
	1-й день				2-й день			
8	441	442	443	444	452	453	454	455
9	445	446а	447	448	456	457	458	459
10	449	450	451	446б	455	460	461	462

441. Десять спортсменов участвовали в турнире по настольному теннису. Каждый два из них сыграли между собой ровно одну партию. Первый игрок одержал в ходе турнира x_1 побед и

потерпел y_1 поражений, второй одержал x_2 побед и потерпел y_2 поражений и т.д. Докажите, что

$$x_1^2 + \dots + x_{10}^2 = y_1^2 + \dots + y_{10}^2.$$

442. Известно, что с помощью набора из 6 гирь можно уравновесить 63 груза, веса которых являются последовательными натуральными числами. Найдите все такие наборы.

443. Дан правильный семиугольник $A_1A_2 \dots A_7$. Докажите, что

$$\frac{1}{A_1A_5} + \frac{1}{A_1A_3} = \frac{1}{A_1A_7}.$$

444. Игра «Морской бой» происходит в квадрате 7×7 клеток. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить четырехпалубный корабль, если известно, что он:

а) имеет вид $\square\square\square\square$;

б) состоит из четырех клеток, примыкающих друг к другу сторонами?

445. Докажите, что при каждом натуральном n число

$$1^{1987} + 2^{1987} + \dots + n^{1987}$$

не делится на $n + 2$.

446. а) Какое наименьшее число уголков \square нужно разместить в квадрате 8×8 клеток, чтобы в него нельзя было больше поместить без наложения ни одной такой фигуры?

б) В квадрате из 1987×1987 клеток вырезана одна произвольная клетка. Докажите, что оставшуюся часть всегда можно разрезать на трехклеточные «уголки».

447. Параллельно сторонам треугольника проведены три прямые. Каждая из прямых удалена от стороны, которой она параллельна, на расстояние, равное длине этой стороны. При этом для каждой стороны треугольника параллельная ей прямая и противолежащая этой стороне вершина расположены по разные стороны от нее. Докажите, что точки пересечения продолжений сторон треугольника с тремя проведенными прямыми лежат на одной окружности.

448*. На плоскости даны две замкнутые ломаные, каждая с нечетным числом звеньев. Все прямые, содержащие звенья этих ломаных, различны, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что из каждой ломаной можно выбрать по одному звену так, чтобы они были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырехугольника.

449. Найдите такой набор из пяти различных натуральных

чисел, в котором любые два числа взаимно просты, а любые несколько чисел дают в сумме составное число.

450. Докажите, что если в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ имеют место равенства $\angle ABC = \angle ADE$ и $\angle AEC = \angle ADB$, то $\angle BAC = \angle DAE$.

451. Найдите все значения α , для каждого из которых последовательность

$$\cos \alpha, \cos 2\alpha, \cos 4\alpha, \cos 8\alpha, \dots, \cos 2^n \alpha, \dots$$

состоит только из отрицательных чисел.

452. Положительные числа a, b, c, A, B, C удовлетворяют условиям $a + A = b + B = c + C = k$. Докажите, что

$$aB + bC + cA \leq k^2.$$

453. В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.

454. Вершина B угла ABC лежит вне окружности, а лучи BA и BC ее пересекают. Из точки K пересечения луча BA и окружности перпендикулярно биссектрисе угла проведена прямая, пересекающая окружность в точках K и P , а луч BC – в точке M . Докажите, что отрезок PM вдвое длиннее перпендикуляра, опущенного из центра окружности на биссектрису угла ABC .

455. Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p . Правилами игры запрещается писать на доске делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p = 10$, и укажите ее.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p = 1000$.

456. Дядька Черномор каждый вечер из 33 богатырей назначает на дежурство 9 или 10 по своему усмотрению. Через какое наименьшее число дней может оказаться, что каждый из богатырей выходил на дежурство одинаковое число раз?

457. На целочисленной решетке отмечено непустое множество узлов. Кроме того, задан конечный набор ненулевых векторов с целыми координатами. Известно, что если от любого отмеченного узла отложить все заданные векторы, то среди их концов будет больше отмеченных узлов, чем неотмеченных. Докажите, что отмеченных узлов бесконечно много.

458. Выпуклый p -угольник ($p \geq 5$) разрезан по всем диагоналям. Докажите, что среди получившихся при этом частей найдутся части разной площади.

459*. Множество T_0 состоит из всех чисел вида $(2^k)!$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. При каждом значении $p = 1, 2, \dots, 1987$ множество T_p получается добавлением к множеству всех чисел, представимых в виде суммы нескольких различных чисел из T_{p-1} . Докажите, что хотя бы одно натуральное число не принадлежит множеству T_{1987} .

460. График функции $y = f(x)$, определенной на всей числовой прямой, переходит в себя при повороте на угол вокруг начала координат.

а) Докажите, что уравнение $f(x) = x$ имеет ровно одно решение.

б) Приведите пример такой функции.

461. Все грани выпуклого многогранника являются треугольниками. Докажите, что каждое ребро этого многогранника можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы в итоге из любой его вершины в любую другую можно было попасть, двигаясь только по красным ребрам, а также только по синим.

462. Докажите, что при любом натуральном значении n справедливо неравенство

$$(2n+1)^n \geq (2n)^n + (2n-1)^n.$$

220. Идею решения можно высказать одной фразой: сумма расстояний до концов стрелок в среднем (по времени) больше, чем сумма расстояний до центров часов. Доказательство можно провести так.

Рассмотрим суммы s_1 и s_2 расстояний от центра стола O до концов минутных стрелок в два момента времени, отстоящие на 30 минут. Величина $s_1 + s_2$ больше $2s_0$, где s_0 – сумма расстояний от O до центров часов, потому что у каждого треугольника OM_1M_2 сумма длин двух сторон OM_1 и OM_2 больше удвоенной длины медианы, расположенной между ними (рис.1), Поэтому хотя бы одно из чисел s_1 или s_2 больше s_0 .

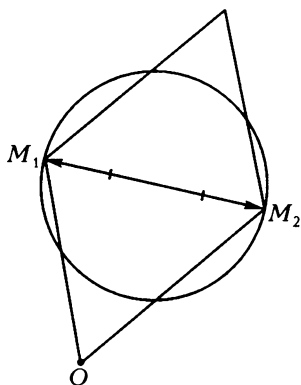


Рис. 1

221. Решение задачи а) вытекает из таких двух соображений: (1) под каждым числом a в m -й строчке ($m \geq 2$) написано число, не меньшее a ; (2) каждое из этих чисел не превосходит 1000. Для решения б) нужно еще учесть, что если число a в m -й строчке ($m \geq 2$) строго меньше стоящего под ним числа b , то $b \geq 2a$: несколько групп по a чисел (каждая группа стоит под равными числами) объединяются в одну группу из b чисел; отсюда по индукции следует, что в такой ситуации $b \geq 2^{m-1}$. Но $2^{m-1} \leq 1000$ лишь при $m \leq 10$. Пример последовательности, для которой 10-я строчка не совпадает с 11-й:

$$0, 1, 2, 2, 4, 4, 4, 4, \underbrace{8, 8, \dots, 8}_{8}, \dots, \underbrace{256, \dots, 256}_{256}, \underbrace{488, \dots, 488}_{488}.$$

Вот как выглядят последовательные ее преобразования:

№ 2	1, 1, 2, 2, 4, ..., 4, 8, ..., 8, ..., 256, ..., 256, 488, ..., 488
№ 3	2, 2, 2, 2, 4, ..., 4, 8, ..., 8, ..., 256, ..., 256, 488, ..., 488
...	...
№ 10	256, 256,, 256, 488, ..., 488
№ 11	512, 512,, 512, 488, ..., 488

∇ Аналогично для последовательности из n чисел, где $2^{k-1} \leq n < 2^k$, можно доказать, что $(k + 2)$ -я строка будет совпадать с $(k + 1)$ -й, но $(k + 1)$ -я еще может не совпадать с k -й.

222. Задача а) – вырожденный частный случай б) и решается аналогично. Укажем идею решения задачи б).

Пусть O_1, O_2, O_3 – центры окружностей, содержащих дуги $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{EF}$ соответственно (рис.2,а). Тогда $\overline{O_1A} = -\overline{O_2D}$, $\overline{O_1B} = -\overline{O_3E}$, $\overline{O_3F} = -\overline{O_2C}$ (как противоположные стороны ромбов). Поэтому, перенеся секторы O_1AB , O_3EF и O_2CD к

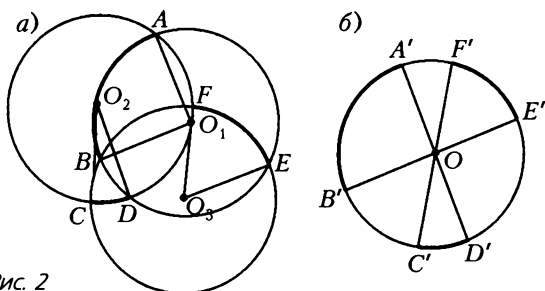


Рис. 2

общему центру O , мы получим три сектора, которые вместе с симметричными им относительно точки O дают полный круг (рис.2,б).

223. Если переставить три первых числа в порядке убывания, то для всех членов последовательности будет выполняться условие $x_k \leq x_{k-r} - x_{k-1}$, а последовательность станет убывающей: $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \dots \geq x_{21}$. Если предположить, что $x_{21} \geq 1$, то из $x_{k-2} \geq x_k + x_{k-1}$ следовало бы $x_{20} \geq 1$, $x_{19} \geq 2$, $x_{18} \geq 3$, $x_{17} \geq 5$, ... Остается только написать 21 член «последовательности Фибоначчи» (П21)

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 6745, 10916,

чтобы получить противоречие: $x_1 > 10000$.

224. Можно (пример изображен на рис.3). Другими словами, можно устроить отображение множества вершин куба на себя так, чтобы любые две соседние (соединенные ребром) вершины перешли в вершины, не соединенные ребром.

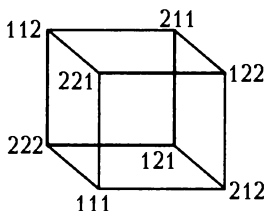


Рис. 3

225. Правая часть неравенства, так же как и левая, симметрична относительно \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{d} (при условии, что их сумма равна 0); поскольку $\vec{b} + \vec{c} = -(\vec{a} + \vec{d})$ и т.д., она равна полусумме длин всех попарных сумм данных векторов. Учитывая это, можем для данной четверки векторов с суммой 0 выбрать обозначения так, чтобы ломаная, составленная из векторов $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{BC} = \vec{b}$, $\overline{CD} = \vec{c}$, $\overline{DA} = \vec{d}$, была самопересекающейся. Для этого достаточно, чтобы векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , отложенные от одной точки O , лежали в одной полуплоскости, причем \vec{a} и \vec{c} лежали по одну сторону от прямой, проходящей через O и параллельной \vec{b} . Тогда

$$|\vec{a} + \vec{d}| + |\vec{c} + \vec{d}| = BD + AC \leq |\vec{b}| + |\vec{d}|,$$

и остается добавить к этому

$$|\vec{b} + \vec{d}| = |\vec{a} + \vec{c}| \leq |\vec{a}| + |\vec{c}|.$$

∇ Другое решение, основанное на идее усреднения проекций векторов по всевозможным направлениям, позволяет свести двухмерный и даже трехмерный вариант этой задачи к доказательству аналогичного неравенства для чисел, т.е. к одномерному варианту.

226. Ответ: 1976. Все отмеченные точки, кроме центра O 1976-угольника, лежат по 1976 штук на 987 окружностях с центром O . Любая другая окружность γ пересекает каждую из этих 987 окружностей в двух точках; кроме этих точек пересечения, на γ может лежать еще лишь одна отмеченная точка: O . Поэтому на такой окружности γ не более $987 \cdot 2 + 1 = 1975$ отмеченных точек.

227. Отметим у каждого из k кусков, на которые распалась оставшаяся часть листа, 4 вершины (углы при этих вершинах — 90° или 170°). Каждая из $4k$ отмеченных точек — вершина одного из n вырезанных прямоугольников или исходного, причем если какая-то точка отмечена дважды, то к ней примыкают и два прямоугольника. Поэтому $4k \leq 4n + 4$, откуда $k \leq n + 1$.

228. Три точки (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , (x_2, y_2) лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$(x_1 - x_0)(y_2 - y_0) - (x_2 - x_0)(y_1 - y_0) = 0. \quad (*)$$

Если x_i и y_i ($i = 0, 1, 2$) — линейные функции от времени t , то $(*)$ становится квадратным уравнением относительно t ; оно имеет не более двух корней.

229. а) Можно считать, что жук из центральной клетки сместился вправо на $k \geq 2$ клеток. Напишем в каждой из 49

клеток правого ряда, на какое число клеток по горизонтали сместился жук из соответствующей клетки; смещение вправо считаем положительным, влево – отрицательным. Очевидно, для самого правого жука смещение отрицательно, а написанные нами числа в соседних клетках отличаются не более чем на 2. Двигаясь по ряду от центральной клетки вправо, мы где-то должны «перейти через 0», поэтому одно из написанных чисел равно 1, 0 или -1 , т.е. один из жуков должен сместиться не более чем на одну клетку.

б) **Ответ:** утверждение неверно. На рисунке 4 приведен пример, когда все жуки оказываются далеко от своих начальных

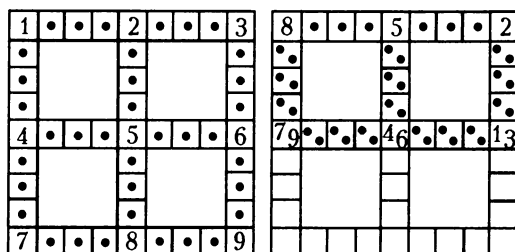


Рис. 4

клеток (слева показано, какие номера мы приписываем каждому жуку, справа – куда должны лететь жуки с соответствующими номерами).

в) **Ответ:** верно. Докажем это утверждение сразу для прямоугольника из $m \times n$ клеток. Для квадратов 1×1 , 2×2 и прямоугольника 1×2 оно очевидно. (Вообще, для прямоугольников $1 \times n$ и $2 \times n$ его легко доказать так же, как а.) Пусть размеры прямоугольника $m \times n$ больше 2: $2 < m \leq n$. Мы докажем, что из него (отрезанием крайних рядов) можно получить меньший прямоугольник Π , все жуки из которого вновь попадают в Π , поэтому достаточно будет убедиться, что в Π имеется нужный «почти неподвижный» жук.

Удобно измерять *расстояние* ρ между клетками A , B по числу ходов, за которые шахматный король может попасть из A в B : множество клеток M (на клетчатой бумаге), находящихся от данной клетки C на расстоянии не большем r , для любого $r = 1, 2, \dots$ заполняет квадрат $(2r+1) \times (2r+1)$ с центральной клеткой C . По условию, жук из клетки K попадает в такую клетку $f(K)$, что для клеток A , B на расстоянии 1 будет $\rho(f(A), f(B)) \leq 1$. Тогда для любых двух клеток A и B

$$\rho(f(A), f(B)) \leq \rho(A, B). \quad (*)$$

В прямоугольнике $m \times n$ ($m \leq n$) будем называть «крайни-ми» клетки, расстояние от которых до некоторых клеток прямо-угольника равно $n - 1$. Если $m < n$, такие клетки заполняют два крайних ряда (короткие стороны прямоугольника); в квадрате $n \times n$ они заполняют четыре крайних ряда (каемку). Заметим, что расстояние ρ между двумя клетками противоположных крайних рядов равно $n - 1$, а для любых двух других клеток оно меньше.

Если в какой-то из крайних рядов не попадает ни один жук, то, убрав этот ряд, мы получим нужный прямоугольник Π размерами $m \times (n - 1)$; из любой клетки K жук перелетает в клетку $f(K)$ из Π .

В противном случае в качестве Π можно взять прямоуголь-ник, полученный из данного отрезанием всех крайних рядов. Действительно, можно отметить несколько (две, три или четыре) клетки K_i так, чтобы в каждом крайнем ряду содержалась одна из клеток $f(K_i)$. Поскольку $\rho(M, K_i) \leq n - 2$ для любой клетки M из Π и каждой клетки K_i , то согласно (*) будет $\rho(f(M), f(K_i)) \leq n - 2$, а отсюда и из замечания о противопо-ложных рядах следует, что $f(M)$ содержится в Π .

Теперь доказательство очевидно проводится индукцией (по $n = \max\{m, n\}$ или по $m + n$). Более того, из него следует, что всегда найдется квадрат 2×2 клетки, переходящий в себя.

▽ Эта задача – один из дискретных вариантов знаменитой теоремы Брауэра о том, что непрерывное отображение выпукло-го множества в себя имеет неподвижную точку.

230. На рисунке 5 указан путь построения разбиений, удов-летворяющих сразу самым сильным условиям б), в) и г) для

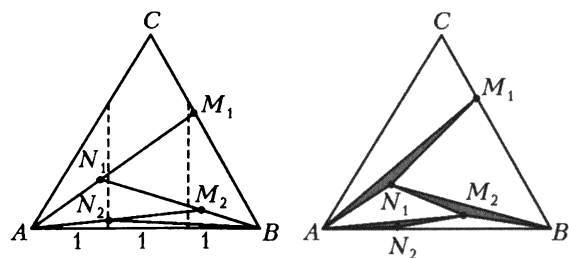


Рис. 5

правильного треугольника со стороной 3: при переходе от левому рисунку к правому каждая из точек M_2, M_3, \dots и N_1, N_2, N_3, \dots , слегка отодвигается вниз, образуя дополнительные очень узкие треугольники $AM_k N_k$, $BN_k M_{k+1}$; $k = 1, 2, \dots$

231. Пример а) очевиден: достаточно выписать n раз подряд «блок» $1\ 2\ 3\ \dots\ n$; i -ю цифру любой перестановки можно взять из i -го блока. В качестве примера б) годится последовательность

$$\underbrace{1\ 2\ \dots\ n\ 1\ 2\ \dots\ n\ \dots\ 1\ 2\ \dots\ n\ 1}_{n-1}.$$

В самом деле, если в перестановке (k_1, k_2, \dots, k_n) хоть одна пара соседних чисел k_j, k_{j+1} стоит в порядке возрастания, то их можно взять из одного блока $1\ 2\ \dots\ n$ (j -го по порядку): при этом последняя 1 даже не понадобится. Если это не так, то перестановка обязательно совпадает с $(n, n-1, n-2, \dots, 2, 1)$; тогда из j -го блока нужно взять $n-j$, и пригодится последняя 1.

в) Отметим для каждого числа k (от 1 до n) первое его вхождение в универсальную последовательность. Одно из отмеченных чисел встречается на n -м месте от начала или даже дальше. Пусть для определенности таким числом будет m . Перед ним стоит по крайней мере $n-1$ число. После него стоит последовательность, которая должна быть универсальной для перестановок чисел $(1, 2, n-1)$, и по индукции мы можем считать доказанным, что ее длина не меньше $(n-1)/2$. Поэтому длина n -универсальной последовательности не меньше $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

г) Заметим, что если число n входит в n -универсальную последовательность лишь один раз, то до него и после него должна стоять $(n-1)$ -универсальная последовательность. Это дает возможность получить более точную оценку снизу, чем в пункте в).

Пусть l_n —длина минимальной n -универсальной последовательности. Тогда $l_2 = 3$. Докажем, что $l_3 = 7$. Пример: 1213121 или 1231231. Если какое-то число (скажем, 3) входит в последовательность лишь один раз, то ее длина не меньше $1 + 2l_2 \leq 7$. В другом случае рассмотрим число, которое впервые встретится на 3-м месте или позже (пусть это будет 3). За ним встретится еще раз 3, а также 2-универсальная последовательность, так что общая длина не меньше $2 + 1 + 1 + l_2 = 4 + l_2 = 7$. Аналогично убеждаемся в том, что $l_4 = 12$. Пример: 123412314231 или 412341243142. Оценки: если некоторое число входит в последовательность лишь один раз, то ее длина не меньше $1 + 2l_3 = 15$, в другом случае она не меньше $3 + 1 + 1 + l_2 = 12$.

То же рассуждение показывает, что $l_n \geq n(n+1)/2 + n - 2$.

д) Можно доказать, что n -универсальной является такая

последовательность длины $n^2 - 2n + 4$:

$$n \underbrace{1 \ 2 \ \dots \ (n-1)} \ n \underbrace{1 \ 2 \ \dots \ (n-2) \ n \ (n-1)} \ \dots \underbrace{1 \ 2 \ n \ 3 \ \dots \ (n-1)} \ 1 \ n \ 2, \quad (*)$$

где в каждый из $n - 2$ блоков $1 \ 2 \ \dots \ (n - 2)$ вставлено n (после $n - 1$, затем после $n - 2$, ..., наконец, после 2), кроме того, n стоит в начале последовательности и в конце ее, имеющем вид $1 \ n \ 2$. (Так изготовлен второй пример для $n = 4$.) Для этого достаточно убедиться в том, что слева от k -го вхождения n в $(*)$ можно вычеркиванием получить любую последовательность из $k - 1$ различных чисел (среди $1, 2, \dots, n - 1$), а справа – любую из $n - k$ таких чисел; дело в том, что обе эти части – левая и правая – после вычеркивания всех вхождений n (правая – также после циклической перенумерации) имеют такой тип:

$$\underbrace{\underbrace{1 \ 2 \ \dots \ m} \ \underbrace{1 \ 2 \ \dots \ m} \ \underbrace{1 \ 2 \ \dots \ m}}_{r-1 \text{ раз}} \ 1 \ 2 \ \dots \ r,$$

где $r \leq m = n - 1$.

А эта последовательность обладает следующим свойством « (m, r) -универсальности»: из нее вычеркиванием можно получить любую последовательность r разных чисел (среди $1, 2, \dots, m$).

232. Пусть $m = [n/2]$, так что $n = 2m$ или $n = 2m + 1$. Занумеруем данные числа следующим образом: $x_0 = 1$ – «начальное» число; x_1, x_2, \dots, x_m – идущие подряд по часовой стрелке от x_0 ; $x_{-1}, x_{-2}, \dots, x_{-m+1}$ (и x_{-m} , если n нечетно) – идущие подряд против часовой стрелки от x_0 .

а) Если любые два соседних числа различаются не более чем на ϵ , то

$$\begin{array}{ll} x_1 \geq 1 - \epsilon, & x_{-1} \geq 1 - \epsilon, \\ x_2 \geq 1 - 2\epsilon, & x_{-2} \geq 1 - 2\epsilon, \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_{m-1} \geq 1 - (m-1)\epsilon, & x_{-m+1} \geq 1 - (m-1)\epsilon, \\ x_m \geq 1 - m\epsilon, & (x_{-m} \geq 1 - m\epsilon). \end{array}$$

Сложив эти неравенства, включая также равенство $x_0 = 1$, и учитывая, что сумма всех n чисел равна 0, получим

$$0 \geq n - (1 + 2 + \dots + (m-1) + m + (m-1) + \dots + 2 + 1)\epsilon = n - m^2\epsilon,$$

откуда $\epsilon \geq n/m^2 \geq 4/n$ (поскольку $m^2 \leq n^2/4$).

∇ При четном n оценка точная. При нечетном $n = 2m + 1$ ее можно, используя еще x_{-m} , слегка уточнить:
 $\varepsilon \geq n / (m^2 + m) = 4n / (n^2 - 1)$.

б) Здесь можно дважды воспользоваться результатом а). Пусть наибольшая по модулю разность соседних чисел на окружности равна ε . Согласно а) $\varepsilon \geq 4/n$. С другой стороны, «нормированные» разности соседних чисел набора (x_1, x_2, \dots, x_n) — числа $y_k = (x_k - x_{k-1})/\varepsilon$ — в свою очередь удовлетворяют всем условиям задачи а), поэтому для некоторого k

$$\left| \frac{x_{k+1} + x_{k-1}}{2} - x_k \right| = \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{2} - \frac{x_k - x_{k-1}}{2} \right| = |y_{k+1} - y_k| \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{8}{n^2}$$

(здесь иногда индекс нужно, конечно, уменьшить или увеличить на n , так как числа расположены на окружности).

в) и г) Покажем, как для любого n получить наилучшую возможную оценку сверху для величины δ — максимальной по модулю разности между числом на окружности и средним арифметическим двух его соседей и построить оптимальный (с наименьшим значением δ) набор. При этом набор (x_k) можно сразу считать симметричным: $x_k = x_{-k}$, поскольку замена x_k на $(x_k + x_{-k})/2$ сохраняет все свойства, оговоренные в условии задачи, и оценку $|x_{k-1} - 2x_k + x_{k+1}| \leq 2\delta$. Прежде чем оценивать сами числа x_k , оценим разности $x_{k-1} - x_k$, начиная с x_0 , а затем — начиная с противоположной точки (середины набора). Поскольку $x_1 = x_{-1}$,

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &\leq -x_{-1} + 2x_0 - x_1, \quad 2 \leq \delta; \\ x_1 - x_2 &\leq (x_0 - x_1) + x_0 + 2x_1 - x_2 \leq 3\delta, \\ x_2 - x_3 &\leq (x_1 - x_2) + -x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 5\delta, \dots, \\ x_{k-1} - x_k &\leq (2k-1)\delta, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

При четном $n = 2m$, когда имеется одно противоположно расположенное по отношению к x_0 число x_m , аналогично получим

$$x_{m-1} - x_m \leq \delta, x_{m-2} - x_{m-1} \leq 3\delta, \dots, x_{m-j} - x_{m-j+1} \leq (2j-1)\delta. \quad (2)$$

Если $n = 2m + 1$ нечетно ($x_m = x_{-m}$ — два соседних числа), то

$$x_{m-1} - x_m \leq 2\delta, x_{m-2} - x_{m-1} \leq 4\delta, \dots, x_{m-j} - x_{m-j+1} \leq 2j\delta. \quad (2')$$

Заметим, что для k меньшего, чем $m/2$, лучшей оценкой для $x_{k-1} = x_k$ будет (1), а для k большего $m/2$ — (2) или (2'): для оптимального набора чисел (x_k) соответствующие неравенства

должны стать равенствами, при этом график оптимальной последовательности будет лежать на кусочках парабол (рис.6).

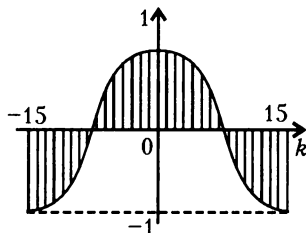


Рис. 6

Чтобы доказать это и привести точную оценку δ для каждого n , нужно разобрать отдельно четыре случая, соответствующие разным остаткам n при делении на 4. Пусть, например $n = 4l + 2$. Из (1) и (2) следует, что $x_k = x_{-k} \geq 1 - s_k \delta$, где s_k – сумма первых k чисел в строке:

$$1, 3, \dots, 2l - 1, 2l + 1, 2l - 1, \dots, 3, 1.$$

Точная оценка δ получится из условия, что сумма всех x_k равна 0, а оптимальным будет набор $x_k = x_{-k} = 1 - s_k \delta$. В частности, для $n = 30$ ($l = 7$) получим:

$$0 = x_0 + 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{14}) + x_{15} \geq 30 - S\delta,$$

где $S = 2(s_1 + s_2 + \dots + s_{14}) + s_{15}$. Эту сумму удобно считать так: поскольку

$$s_{15} = 1 + 3 + 5 + \dots + 11 + 13 + 11 + \dots + 3 + 1 = 7^2 + 8^2 =$$

$$= 113 = s_1 + s_{14} = s_2 + s_{13} = \dots = s_7 + s_8,$$

то $S = (2 \cdot 7 + 1)s_{15} = 15 \cdot 113$. Таким образом, $\delta \geq 2/113$, причем $\delta = 2/113$ только для набора (показанного на рисунке)

$$x_k = x_{-k} = 1 - s_k \delta =$$

$$= \begin{cases} 1 - k^2 \delta & \text{при } 0, 1, \dots, 7, \\ 1 - (113 - (15 - k)^2) \delta = -1 + (15 - k)^2 \delta & \text{при } k = 8, \dots, 15. \end{cases}$$

Аналогично можно получить точные границы δ для любого n и убедиться, что при всех n выполнено неравенство $\delta \geq 16/n^2$ (при больших n эта оценка близка к точной).

▽ Непрерывный аналог последней задачи: найти наибольшую возможную разность между максимумом и минимумом периодической функции с периодом T , у которого вторая производная не превосходит по модулю 1. Эта задача даже проще, чем «дискретный» вариант. График функции, имеющей наибольшее «колебание», также состоит из кусочков парабол [69].

233. Отметим сначала несколько фактов, относящихся к случаю любого натурального n . Существует всего 2^n расстановок чисел $+1$ и -1 в вершинах правильного n -угольника. Будем

называть две расстановки эквивалентными, если от одной из них к другой (а стало быть, и обратно) можно перейти указанными в условии операциями – изменением знаков в вершинах правильных n -угольников. Любые две операции такого типа «коммутируют» – результат не зависит от порядка, в котором они выполняются; повторение любой операции дважды также можно исключить – оно эквивалентно тождественной операции, не меняющей расстановки. При этом можно ограничиться лишь операциями изменения знаков в вершинах правильных p -угольников с простым числом вершин p (назовем их «образующими»); множество вершин правильного n -угольника при любом n , делящемся на p , можно разбить на n/p образующих p -угольников.

Прежде чем двигаться дальше, рассмотрим конкретные задачи.

а) При $n = 15$ существует всего 8 образующих p -угольников: 5 треугольников и 3 пятиугольника. Единичную (состоящую из всех $+1$) расстановку обозначим через E . Любая эквивалентная E расстановка определяется указанием некоторого подмножества из 8 этих p -угольников; различных подмножеств (включая пустое) существует 2^8 – это меньше, чем общее число 2^{18} расстановок. Поэтому существуют расстановки, не эквивалентные E .

б) При $n = 30$ общее число образующих p -угольников равно $15 + 10 + 6 = 31$, так что для решения задачи нужны дополнительные соображения. Заметим, что можно ограничиться меньшим числом образующих: например, из каждой пары симметричных относительно центра треугольников (и пятиугольников) можно оставить лишь один – изменение знаков в нем, а также в трех (пяти) «двуугольниках», содержащих его вершины, эквивалентно изменению знаков в другом, ему симметричном. Остается $15 + 5 + 3 = 23$ образующих, таким образом, существует не более $2^{23} < 2^{30}$ расстановок, эквивалентных E .

в) Покажем, как для любого n найти точное количество $T(n)$ расстановок, эквивалентных E . Заметим, что количества расстановок, эквивалентных какой-то другой расстановке A из $+1$ и -1 , также равно $T(n)$: все они получаются почленным умножением знаков расстановки A на любую расстановку из класса эквивалентных E . Обозначим через $K(n)$ число «классов эквивалентности» – максимальное количество попарно неэквивалентных друг другу расстановок; тогда

$$K(n) = 2^n / T(n).$$

Пусть n содержит s разных простых множителей:

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_s^{\alpha_s}. \quad (*)$$

Положим $p_1 p_2 \dots p_s = q$; $n/q = m$. Разобьем правильный n -угольник на m правильных q -угольников. Задача вычисления $T(n)$ сводится к более простой задаче вычисления $T(q) = T(p_1 \dots p_s)$; ведь каждый из образующих p_i -угольников содержится лишь в одном из q -угольников, — другими словами, происходящие в разных q -угольниках изменения знаков независимы, поэтому

$$T(n) = (T(q))^m, \quad K(n) = (K(q))^m.$$

Начнем со случая $s = 2$: пусть $n = p_1 p_2$. Занумеруем вершины n -угольника числами $0, 1, \dots, n-1$. Запишем эти числа в таблицу $p_1 \times p_2$ так, что числа в одном столбце дают одинаковый остаток при делении на p_1 , в одной строке — при делении на p_2 . Это можно сделать, потому что пара остатков (r_1, r_2) от деления на p_1 и p_2 однозначно определяет номер от 0 до n (рис.7). Расстановкам чисел $+1$ и -1 в точках на окружности соответствуют расстановки чисел $\sigma(r_1, r_2) = +1$ и -1 в клетках таблицы (r_1 — номер строки, r_2 — номер столбца), изменению знаков в p_1 - и

	0	1	2	3	4
0	0	6	12	3	9
1	10	1	7	13	4
2	5	11	2	8	14

Рис. 7

p_2 -угольниках — изменение знаков σ в строках и столбцах. Любую расстановку этими операциями можно привести к такой, у которой в первой строке и первом столбце стоят одни $+1$. Такие «приведенные» расстановки будут попарно неэквивалентны; в самом деле, при замене знаков σ в строках и столбцах величина произведения

$$\sigma(r_1, r_2) \sigma(0, r_2) \sigma(r_1, 0) \sigma(0, 0)$$

сохраняется (набор таких величин для всех (r_1, r_2) , $1 \leq r_1 \leq p_1 - 1$, $1 \leq r_2 \leq p_2 - 1$ определяет класс эквивалентности). Поэтому

$$K(p_1 p_2) = 2^{(p_1-1)(p_2-2)}, \quad T(p_1 p_2) = 2^{p_1 - p_2 - 1}.$$

В частности, $K(15) = 2^8$, $T(5) = 2^7$; $K(10) = 2^4$. Последнее равенство позволяет найти $K(200)$: $n = 200 = 2^3 \cdot 5^2$, $q = 10$, $m = 20$, $K(200) = (K(10))^{20} = 2^{4 \cdot 20} = 2^{80}$.

Аналогичные соображения позволяют найти $K(n)$ для случая любого s . Пусть $q = p_1 p_2 \dots p_s$; номер k от 0 до $q-1$ однозначно определяется остатками r_1, r_2, \dots, r_s от деления q на p_1, p_2, \dots, p_s («китайская теорема об остатках», П2); с расстанов-

ками $\sigma(r_1, r_2, \dots, r_s)$ – функциями на множестве наборов r_i , $0 \leq r_i \leq p_i - 1$ ($1 \leq i \leq s$), принимающими значения $+1$ и -1 , – разрешено проделывать операции одновременной замены знаков в одном «ряду», состоящем из p_i наборов, у которых i -я координата r_i произвольна – меняется от 0 до $p_i - 1$, а остальные $s - 1$ чисел r_i фиксированы (для каждого $i = 1, 2, \dots, s$); этими операциями любая расстановка сводится к такой, для которой $\sigma(r_1, r_2, \dots, r_s) = +1$, если хоть одно r_i равно 0 ; полученные приведенные расстановки неэквивалентны (сохраняется произведение 2^s значений σ для наборов, получающихся из данного заменой некоторых координат на нули). Выпишем ответ для $q = p_1 p_2 \dots p_s$, и для любого $n = qm$ вида $(*)$:

$$K(q) = 2^{(p_1-1) \dots (p_s-1)}; \quad K(n) = 2^{\Phi(n)},$$

где

$$\Phi(n) = n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{p_s}\right).$$

В частности, $K(30) = 2^8$, $T(30) = 2^{22}$.

Возникшая здесь несколько неожиданно функция $\Phi(n)$ хорошо известна в теории чисел: это – функция Эйлера, выражающая количество натуральных чисел, меньших n и взаимно простых с ним [53].

234. Мы будем рассматривать лишь точки одного «северного» полушария с полюсом P (значения функции f в диаметрально противоположных точках одинаковы). Полюс P мы считаем самой высокой точкой сферы. Очевидно, $f(P) = 1$, $0 < f(M) < 1$ для всех других точек M сферы.

а) Пусть O – центр сферы. Расстояние c_M от точки M до экваториальной плоскости равно косинусу угла MOP , так что

$$f(M) = c_M^2 = \cos^2 \gamma, \quad \gamma = \angle MOP.$$

Если c_1, c_2, c_3 – косинусы углов, образуемых с OP тремя взаимно перпендикулярными радиусами OM_1 , OM_2 , OM_3 , то $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$, поскольку c_1, c_2, c_3 – это длины проекций единичного отрезка OP на три взаимно перпендикулярные прямые (можно построить прямоугольный параллелепипед с ребрами c_1, c_2, c_3 и диагональю $OP = 1$).

Решение задач б) и в) опирается на такое следствие условия $(*)$.

Пусть Γ_X – половина большого круга (отличная от экватора и меридиана), с концами на экваторе, для которой X является самой высокой точкой. Тогда для любой точки Y дуги Γ_X ,

отличной от X , $f(Y) < f(X)$. В самом деле,

$$f(Y) + f(Y') + f(Q) = f(X) + 0 + f(Q) = 1,$$

где Y' – точка дуги Γ_X , для которой $\angle YOY' = 90^\circ$, а Q – конец радиуса, перпендикулярного плоскости Γ_X .

б) Через каждую точку X дуги Γ_M мы можем проведем свою дугу Γ_X и выбрать из них такую Γ_Y , которая содержит T . Тогда $f(M) > f(Y) > f(N)$.

в) Аналогично предыдущему для любой пары точек M и N (где M выше N) можно построить цепочку $M = X_0, X_1, X_2, \dots, X_r = N$ так, что X_j лежит на $\Gamma_{X_{j-1}}$ для $j = 1, 2, \dots, r$ (если M и N близки по широте, но сильно различаются по долготе, то придется сделать большое число r шагов),

г) Если для двух точек M и N , лежащих на одной параллели Π на расстоянии c_1 от экваториальной плоскости, $f(M) - f(N) = \varepsilon > 0$, то для любых двух точек M', N' , где M' выше c_1 , а N' ниже c_1 , будет

$$f(M') - f(N') \geq f(M) - f(N) = \varepsilon,$$

т.е. на высоте c_1 функция f совершает «скачок» величины ε . Из (*) следует, что тогда для любой пары чисел $c_2 > c_3 \geq 0$ такой, что $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$, функция f должна совершать скачок величины не менее $\varepsilon/2$ либо на высоте c_2 , либо на высоте c_3 . Взяв более $[2/\varepsilon]$ таких пар (c_2, c_3) , мы придем к противоречию с условием $0 \leq f \leq 1$.

д) Из предыдущих пунктов следует, что функция $f(M)$ равна $g(c_M^2)$, где c_M – расстояние точки M от экваториальной плоскости, $y = g(x)$ – некоторая монотонно возрастающая функция на отрезке $0 \leq x \leq 1$, удовлетворяющая условиям; $g(0) = 0$, $g(1) = 1$ и

$$g(x_1) + g(x_2) + g(x_3) = 1, \text{ если } x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Из последнего условия (при $x_1 = 0$) следит: $g(x_3) = 1 - g(1 - x_3)$, поэтому для любых x_1, x_2

$$g(x_1) + g(x_2) = 1 - g(1 - x_1 - x_2) = g(x_1 + x_2).$$

Но единственная функция, удовлетворяющая этому функциональному уравнению и условию «нормировки» $g(1) = 1$, – это $g(x) = x$. Этот факт доказывается сначала для рациональных x ($x = 1/n$, затем $x = k/n$), а потом из монотонности – для всех x (см. [72]).

235. Прямая, проходящая по некоторому звену BC ломаной, пересекает четное или нечетное число других звеньев в зависимости от того, лежат ли соседние звенья AB и CD по одну или по разные стороны от прямой BC (в последнем случае звено BC будем называть «зигзагом»); в самом деле, четность числа пересечений ломаной с прямой BC определяется тем, в одной или в разных полуплоскостях от нее расположены точки A и D (рис.8,а). Но на каждой замкнутой ломаной четное число

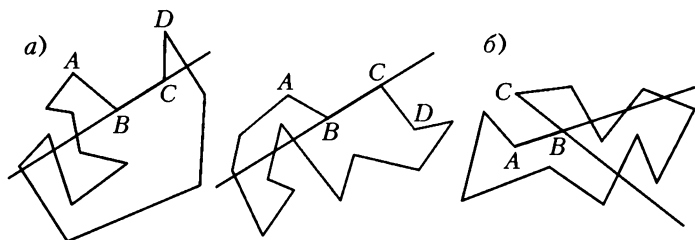


Рис. 8

«зигзагов»: пройдя по этой ломаной и ответив, в какую сторону — влево или вправо — мы поворачиваем в каждой вершине, мы одинаковое количество раз меняем направление поворота слева направо и справа налево. Из этих двух фактов вытекает утверждение задачи.

Еще более короткое доказательство получается, если использовать тот факт, что стороны угла, получающегося при продолжении каждых двух соседних звеньев AB и BC за точку B , ломаная пересекает четное число раз (рис.8,б).

236. Пусть в отмеченной точке X написано число a_X и через нее проходит $n_X > 1$ прямых, содержащих другие отмеченные точки. Сумма чисел на каждой из них по условию равна 0. Общая сумма чисел на всех n_X прямых (в которой a_X участвует n_X раз) равна $s(n_X - 1)a_X = 0$, где s — сумма всех чисел, написанных возле отмеченных точек. Предположение $s \neq 0$ приводит к явному противоречию: для каждой точки X знак числа a_X противоположен знаку суммы s этих чисел; поэтому $s = 0$ и $a_X = 0$ для всех X .

237. Утверждение б) доказано в решении задачи 58 (см. «Библиотечку «Кванта», вып.117). Используя еще два аналогичных ромба (с вершинами B и C), легко получить и результат а).

238. Ответы: а) да, б) 8 ходов (каждый игрок — по 4 хода).

На рисунке 9 показан пример расстановки 41 фишки; возле каждой фишки написан ее ранг — число, показывающее, за

сколько ходов от конца игры она будет убрана. Строить такую расстановку удобно «с конца»: к остающейся последней черной фишке ранга 0 добавить две белые ранга 1, рядом с каждой из них добавить две черные ранга 2 (с той и другой стороны), рядом с каждой из черных – две белые ранга 3 и т.д. Ясно, что этот способ дает на каждом шагу максимально возможное число фишек соответствующего ранга. Тем самым для каждого t получается расстановка с наибольшим возможным числом $a_t = b_t + w_t$ фишек – b_t черных и w_t белых, которая может за t ходов превратиться в одну черную фишку ($b_0 = 1, w_0 = 0$); правило для последовательного вычисления (b_t, w_t) очень простое: при переходе от t к $t + 1$ большее из чисел b_t, w_t не меняется, а к меньшему добавляется удвоенное большее:

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8
b_t	1	1	5	5	29	29	169	169	985
w_t	0	2	2	12	12	70	70	408	408
a_t	1	3	7	17	41	99	239	577	1393

Для решения задачи а) достаточно из 41 точки на рисунке 9 выкинуть одну фишку ранга 4, не влияющую на ситуацию после первого хода (т.е. стоящую рядом с другой фишкой «4»), – например, для сохранения симметрии, отмеченную звездочкой.

Переход от 1000 фишек к одной не может произойти менее чем за 8 ходов, поскольку, как видно из таблицы, $a_7 = 577 < 1000$. Пример ровно с 1000 фишками можно получить из максимальной расстановки для 8 ходов с $c_8 = 1393$ фишками, выбросив 393 фишки ранга 8, не влияющие на ситуацию после первого хода – это можно сделать, поскольку $2 \cdot 408 = 816$ фишек ранга 8, размещаясь среди 577 фишек ранга не более 7, образуют не менее $816 - 577 = 239$ пар стоящих рядом фишек.

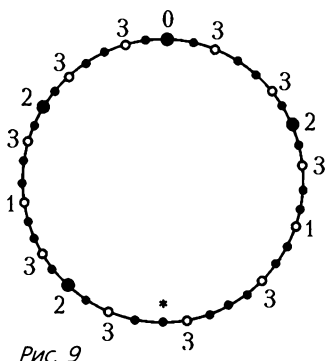


Рис. 9

239. Воспользуемся определением предела последовательности (П21), Если для всех $n \geq N$ некоторого k верны неравенства

$$|a_n - a_{n+1}/2| < \epsilon \text{ и } |a_N|/2^k < \epsilon,$$

то при $m \geq N + k$ будет

$$|a_m| < \frac{1}{2}|a_{m-1}| + \varepsilon < \frac{1}{2^2}|a_{m-2}| + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon < \dots < \frac{1}{2^{m-N}}|a_N| + \\ + \frac{\varepsilon}{2^{m-N+1}} + \dots + \frac{\varepsilon}{2^2} + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon < \frac{1}{2^k}|a_N| + 2\varepsilon < 3\varepsilon.$$

240. Установим взаимно однозначное соответствие f между $n - 1$ отрезками 1-го и 2-го маршрутов такое, что проезд по отрезку 1-го стоит не больше, чем по соответствующему отрезку 2-го. Будем через $t_i(A)$ обозначать «хвост» i -го маршрута ($i = 1, 2$), начинающийся с города A — множество городов, следующих в 1-м маршруте после A . Через A' и A'' будем обозначать города, непосредственно следующие за A в том и другом маршруте.

Определим f так. Если AA' — отрезок первого маршрута такой, что $t_1(A)$ пересекается (имеет общие города) с $t_2(A)$, то положим $f(AA') = AA''$. В противном случае положим $f(AA') = BB'$, где B — последний на втором маршруте город из $t_1(A)$. Заметим, что в этом случае $t_1(B)$ также не пересекается с $t_2(B)$, причем A — последний на первом маршруте город из $t_2(B)$ (отсюда следует, что соответствие f взаимно однозначно, причем обратное к нему f^{-1} определяется тем же правилом).

Проверим, что $|f(a)| \geq |a|$, где $|a|$ означает стоимость проезда по отрезку a . Если C — город из пересечения $t_1(A)$ и $t_2(A)$, то $|AA'| \leq |AC| \leq |AA''|$. Во втором случае $|AA'| \leq |AB| = |BA| \leq |BB'|$ (в обоих случаях неравенства следуют из принципов составления маршрутов: $|DA| \geq |AA'|$ для любого D из $t_1(A)$; для любого E из $t_2(A)$, наоборот, $|EA| \leq |AA''|$).

▽ Другое, менее эффективное, но более простое для придумывания решение (индукция с помощью «уравнивания цен») см. в книге [43].

241. Две окружности, в которые вписаны грани, примыкающие к ребру AB многогранника, однозначно определяют сферу σ , на которой лежат эти окружности и, тем самым, все вершины этих двух граней. Если BC и BD — другие два ребра, выходящие из B , то окружность, содержащая точки B, C, D (описанная вокруг содержащей их грани), также принадлежит σ , так что вершины граней, примыкающих к ребру BC , все лежат на той же σ . Теперь можно рассмотреть аналогично грани, примыкающие к ребру, выходящему из C , и так дойти до любой вершины

многогранника – все они лежат на одной сфере σ : для любой из них можно построить цепочку ребер, оканчивающуюся в этой вершине и начинающуюся с ребра AB .

242. Ответ: у второго есть выигрыш. Для доказательства нужно предъявить выигрывающую стратегию. За свои четыре хода второй заведомо сможет добиться, чтобы оставшаяся для последнего 5-го хода первого звездочка стояла при нечетной степени x^{2l+1} . Пусть перед последним 4-м ходом второго возник многочлен $P(x) + *x^m + l * x^{2l+1}$, где $P(x)$ – известный многочлен с числовыми коэффициентами.

Подберем числа μ и $c > 0$ так, чтобы при любом значении λ для многочлена $F(x) = P(x) + \mu x^m + \lambda x^{2l+1}$ было $cF(1) + F(-2) = 0$; тогда $F(x)$ будет заведомо иметь корень на отрезке $[-2; 1]$ (см. П5); для этого достаточно взять $c = 2^{2l+1}$, $\mu = \frac{P(-2) - cP(1)}{c + (-2)^m}$; конечно, роли 1 и -2 могли бы играть здесь и другие числа разных знаков. Поставив это значение μ на 4-м ходу, второй обеспечит наличие корня.

243. Ответ: $\frac{6}{7}, \frac{5}{7}, \frac{4}{7}, \frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}, 0$ литров.

Проверить, что указанные числа служат ответом, не составляет труда: после разливания молока первым гномом (по $1/7$ каждому из остальных) получается точно то же распределение, но со сдвигом на одного гнома, а сумма $(1 + 2 + 3 + \dots + 6)/7$ равна как раз 3. Нужно еще доказать, что других ответов нет. Предположим, что это не так.

Пусть x – наибольшее количество молока, оказавшееся за все время переливаний у какого-либо гнома Γ , когда пришла его очередь разливать. Тогда после очередного цикла из 7 «разливаний» (их можно неограниченно продолжать, так что Γ можно считать первым в цикле) у Γ накопится не более чем $6 \cdot x/6 = x$ литров; причем равенство возможно, лишь если каждый из 6 других гномов наливает Γ ровно по $x/6$ литров. Таким образом, из условия следует, что каждый гном разливает одно и то же количество x молока и после получения k порций у него в кружке налито $kx/6$ литров ($k = 1, 2, \dots, 6$); значение x находится из условия, что суммарное количество молока – 3 литра.

▽ Эта задача, формулировка которой напоминает очаровательных героев диснеевского фильма «Белоснежка и семь гномов», была признана читателями «Кванта» одной из лучших задач года. Ответ здесь угадать нетрудно – естественно предполо-

ложить, что за одно переливание распределение молока претерпевает лишь сдвиг на одного гнома. Но этого, конечно, недостаточно – нужно еще доказать единственность решения (это можно сделать многими разными способами).

244. а) Ответ: существует одно двузначное 49 и одно четырехзначное $1681 = 41^2$ особое число.

Пусть $(10x + t)^2 = 100x^2 + 20xt + t^2$, где $20xt + t^2$ – квадрат натурального числа, меньшего 10, x и t – целые числа от 1 до 9 и $x^2 > 10$. Тогда $x \geq 4$ и $xt \leq 4$, что возможно лишь при $x = 4$ и $t = 1$.

б) Ответ: да; например, $256036 = 506^2$.

в) Чтобы получить нужное особое число вида

$$(10^5 x + 1)^2 = 10^{10} x^2 + 2 \cdot 10^5 x + 1,$$

достаточно найти целое x такое, что $10^9 < x^2 < 10^{10}$ и $2 \cdot 10^5 x + 1 = y^2 < 10^{10}$. Можно взять $x = 5 \cdot 10^4 - 1$ (искомым 20-значным особым числом будет

$$(4999900001)^2 = 24999000019999800001;$$

оно «состоит» из 49999^2 и 99999^2).

г) Для любого k особым $4k$ -значным числом может быть лишь

$$(10^k x + t)^2 = 10^{2k} x^2 + 2 \cdot 10^k x t + t^2$$

при $10^{2k-1} \leq x^2 < 10^{2k}$, откуда $x > 2 \cdot 10^{k-1}$, и $6 \cdot 10^{2k-1} t < 10^{2k}$, откуда $t = 1$. При этом равенство $2 \cdot 10^k x + 1 = (2u + 1)^2$, эквивалентное $2^{k-1} 5^k x = u(u + 1)$, выполняется лишь в трех случаях:

(1) $u + 1$ делится на $5 \cdot 10^{k-1}$;

(2) u делится на 2^{k-1} , $u + 1$ – на 5^k ;

(3) u делится на 5^k , $u + 1$ – на 2^{k-1} .

Каждый случай дает не более чем одно решение, удовлетворяющее условию $u < 5 \cdot 10^{k-1}$, эквивалентному $2u + 1 < 10^k$ (в случаях (2) и (3) достаточно рассмотреть разность двух решений, чтобы прийти в противоречие с этим условием). Поэтому существует не более трех особых чисел.

∇ Более детальные рассуждения («Квант», 1978, № 6, с. 46) показывают, что таких чисел не более двух.

д) Для любого k существует по крайней мере одно $(4k + 2)$ -значное особое число, а именно $z^2 = v + w^2$, где $v = 25 \cdot 10^{2k-1}$, w – наименьшее натуральное число, большее \sqrt{v} . Пусть $y = w^2 - v$; при этом $z^2 = 4v \cdot w^2 + y^2 = 10^{2k+1} w^2 + y^2$ «состоит»

из w^2 и y^2 и будет особым, если выполнены неравенства $0 < y^2 < 10^{2k+1}$ и $10^k \leq w^2 < 10^{2k+1}$.

Поскольку $w - 1 < \sqrt{v}$ и $(w - 1)^2 \leq v - 1$, то $y < 2\sqrt{v}$ и $y^2 < 4v = 10^{2k+1}$; далее, $10^{2k} < v < w^2 = v + y < v + 2\sqrt{v} < 3v < 10^{2k+1}$.

▽ В частности, с помощью компьютера можно найти, при $k = 7$, число

$$z = 25 \cdot 10^{13} + 15811389^2 = 500000022109321,$$

квадрат которого – 30-значное особое число. Полное исследование в задаче о $(4k + 2)$ -значных особых числах, связанное с десятичным разложением числа $\sqrt{10}$, представляется довольно безнадежным и не слишком интересным.

245. Занумеруем данные числа в порядке возрастания:

$$a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n.$$

Докажем, что каждая сумма s некоторых из них лежит в одном из промежутков между $b_k/2$ и b_k , где $b_k = a_1 + a_2 + \dots + a_s$ ($k = 1, 2, \dots, n$). Достаточно доказать, что никакая сумма s не может оказаться строго между b_k и $b_{k+1}/2$. Предположив, что $s > b_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$, и, стало быть, s содержит некоторое $a_i \geq a_{k+1}$, а потому $s \geq a_{k+1}$, мы получили бы (сложив неравенства), что $2s > a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1} = b_{k+1}$, т.е. $s > b_{k+1}/2$.

246. а) Разобьем десять цифр 0, 1, 2, ..., 9 на две группы по 5 цифр в каждой (например, от 0 до 4 – одна группа, от 5 до 9 – другая). Достаточно использовать ящики, у которых обе цифры берутся из одной группы, поскольку такие две цифры есть в любом трехзначном номере.

б) Кроме 10 ящиков 00, 11, ..., 99, которые непременно будут заняты, потребуется не менее 30 ящиков, чтобы разместить билеты с тремя разными цифрами: таких билетов всего $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$, а в каждый ящик с номером \overline{pq} ($p \neq q$) помещается не более $3 \cdot 8 = 24$ из них (zpq , pzq и pqz , где z – любая цифра, отличная от p и q).

в) Пусть x – наименьшее количество номеров занятых ящиков, начинающихся с одной какой-либо цифры ($x \geq 1$); поскольку все цифры равноправны, мы можем считать, что меньше всего номеров начинается с 9 и эти номера – $\overline{99}, \overline{98}, \dots, \overline{9y}$, где $y = 10 - x$. Тогда любой билет $\overline{9pq}$, где $p < y$, $q < y$, не может помещаться в ящиках $\overline{9p}$ и $\overline{9q}$, т.е. должен быть занят ящик \overline{pq} . Таким образом, заняты по крайней мере все y^2 ящиков с номерами, у которых обе цифры – от 0 до $y - 1$, и еще по крайней

мере x^2 ящиков, начинающихся с одной из цифр от y до 9 (не менее чем по x для каждой из этих x цифр), т.е. всего занято не менее $y^2 + x^2 = (10 - x)^2 + x^2 \geq 50$ ящиков.

г), д) Для данных натуральных чисел k и s , $k < s$, обозначим через $F(k, s)$ наименьшее из чисел $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2$, где x_1, x_2, \dots, x_k — натуральные числа, в сумме дающие s ; величину $F(k, s)$ можно выразить через k и s — наименьшее значение суммы квадратов достигается, когда числа x_j «почти равны»; точнее, если $s = kq + r$, $0 \leq r < k$, то $k - r$ из них равны q , а r остальных $q + 1$, так что

$$F(k, s) = (k - r)q^2 + r(q + 1)^2 = kq^2 + r(2q + 1).$$

Удобно рассматривать сразу более общую задачу — для k -значных «билетов» с s «цифрами» от 0 до $s - 1$ (в нашей задаче $s = 10$). Докажем, что наименьшее число $M(k, s)$ ящиков с номерами pq ($0 \leq p < s$, $0 \leq q < s$), в которые можно поместить билеты, вычеркнув $k - 2$ цифры, равно $F(k - 1, s)$.

В частности, в задаче г)

$$M(4, 10) = F(3, 10) = 3^2 + 3^2 + 4^2 = 34,$$

а ответ к задаче д) дается таблицей

k	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$M(k, 10) = F(k - 1, 10)$	50	34	26	20	18	16	14	12	10

Неравенство $M(k, s) \geq F(k - 1, s)$ можно доказать индукцией по $k + s$, рассуждая так же, как в пункте в):

$$M(k, s) \geq \min_{x=1,2,\dots,s} (M(k - 1, s - x) + x^2).$$

Для размещения билетов по $F(k - 1, s) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{k-1}^2$ ящикам достаточно, как в пункте а), разбить s цифр на $k - 1$ группу (по x_1, x_2, \dots, x_{k-1} цифр) и оставить ящики, у которых обе цифры из одной группы (см. [77]).

247. Раскрасим все узлы в шахматном порядке в черный и белый цвет. На границе лежат $4 \cdot 99$ узлов (не считая вершин) — поровну черных и белых. Пусть все они служат концами ломаных. Тогда имеется одинаковое количество ломаных с двумя белыми и двумя черными концами. Поэтому общее количество белых и черных узлов, лежащих на ломаных внутри доски, также одинаково. (На ломаных с белыми концами на один черный узел больше, на ломаных с черными — на один белый.) Но всего внутри доски 99^2 — нечетное число — узлов, так что по крайней мере один из них не лежит на ломаной.

248. Из условий задачи следует, что величина

$$s = x_1 + x_2 + \dots + x_m = y_1 + y_2 + \dots + y_n$$

не меньше 2 (поскольку $m \leq s$, $n \leq s$, $s < mn$). В случае $m = n = 2$, $2 \leq s \leq 3$ утверждение задачи легко проверяется. Докажем его в общем случае индукцией по $m + n = k$, где $k \geq 4$.

Пусть $x_1 > y_1$ — наибольшие числа среди x_i и y_j соответственно ($1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$; случай $x_1 = y_1$ очевиден). Чтобы применить индукционное предположение к равенству

$$(x_1 - y_1) + x_2 + \dots + x_m = y_2 + \dots + y_n$$

с $k - 1 = m + n - 1$ числами в обеих частях (после чего останется, быть может, перенести y_1 в правую часть), достаточно проверить выполнение неравенства $s' = y_2 + \dots + y_n < m(n - 1)$; поскольку $y_1 > s/n$, то $s' < s - s/n = mn \cdot (n - 1)/n = m(n - 1)$.

249. Выберем самый большой из данных квадратов K_1 , затем — самый большой K_2 из тех, чьи центры не лежат в K_1 , затем — самый большой из оставшихся, чьи центры не лежат в уже отмеченных квадратах K_1 и K_2 , и т.д.

Предположим, что при этом центр C некоторого квадрата попадет более чем в четыре отмеченных, тогда центры каких-то двух из них (K_i и K_j) попадут в одну и ту же из четвертей, на которую делят плоскость оси симметрии квадрата с центром C . Тот из квадратов K_i и K_j , центр которого находится дальше от этих осей (по сумме расстояний, или по наибольшему из них), содержит центр другого. Но это противоречит правилу выбора квадратов.

250. Пусть массы гирь $m_1 < m_2 < \dots < m_n$.

а) Будем ставить гири так: на левую чашку m_1 , затем на правую m_2 , на левую m_3 , на правую m_4 и т.д. При этом последовательность результатов взвешиваний будет такой: $LRLRLR\dots$ Это вытекает из такого простого утверждения.

Лемма. Если $0 < m_1 < m_2 < \dots < m_{k-1} < m_k$, то из двух сумм

$$m_1 + m_3 + m_5 + \dots \quad \text{и} \quad m_2 + m_4 + m_6 + \dots$$

(содержащих все n данных чисел) больше та, в которую попадает наибольшее число m_k .

Для ее доказательства надо при четном k сложить неравенства $m_1 < m_2$, $m_3 < m_4, \dots, m_{k-1} < m_k$, а при нечетном $k - m_1 > 0$, $m_3 > m_2, \dots, m_k > m_{k-1}$.

Эта же лемма, но в применении к отрезку $m_i < m_{i+1} < \dots < m_{k-1} < m_k$, состоящему из $k - i + 1$ чисел, пригодится в решении задачи б).

б) Удобно описать порядок расстановки гирь, соответствующий данному слову из букв L и R , «начиная с конца» слова.

Поставим все гири с четными номерами на одну чашку, с нечетными – на другую, причем самую тяжелую гирю m_n поставим на левую или правую чашку в соответствии с последней буквой данного слова; затем, переходя от каждой буквы слова к предыдущей, будем снимать самую тяжелую из оставшихся гирь, если должна произойти смена буквы (L на R или R на L), и самую легкую – если не должна. При этом каждый раз остается отрезок из (занумерованных подряд) гирь, которые, чередуясь, стоят на одной и другой чашке; к нему применима лемма.

251. а) Ответ: многочлены $Q_1(x) = x$ и $Q_2(x) = P(x)$ коммутируют с многочленом $P(x) = x^2 - \alpha$ при любом α ; многочлен Q степени 3, коммутирующий с $x^2 - \alpha$, существует при $\alpha = 0$ ($Q(x) = x^3$) и при $\alpha = 2$ ($Q(x) = x^3 - 3x$).

Доказательство, что других многочленов нет, и проверка получаются прямым сравнением коэффициентов. Например, для многочлена степени 3: тождество

$$(x^3 + \beta_1 x^2 + \beta_2 x + \beta_3)^2 - \alpha = (x^2 - \alpha)^3 + \beta_1 (x^2 - \alpha)^2 + \beta_2 (x^2 - \alpha) + \beta_3$$

выполнено, если $\beta_1 = \beta_3 = 0$ (сравнение коэффициентов при x^5 , x^3 и x), $2\beta_2 = -3\alpha$ (сравнение коэффициентов при x^4), $\beta_2^2 = 3\alpha^2 + \beta_2$ (при x^2), $\alpha = \alpha^3 + \beta_2 \alpha$ (свободный член), откуда либо $\alpha = 0$ и $\beta_2 = 0$, либо

$$\beta_2 = -3\alpha/2 = 1 - \alpha^2 = \beta_2^2 - 3\alpha^2;$$

как ни удивительно, три уравнения с двумя неизвестными имеют решение $\alpha = 2$, $\beta_2 = -3$.

б) Нетрудно проверить, что при одновременном преобразовании двух коммутирующих многочленов $P(x)$ и $Q(x)$

$$P(x) \rightarrow P^*(x) = P(x - \gamma) + \gamma, \quad Q(x) \rightarrow Q^*(x) = Q(x - \gamma) + \gamma$$

(γ – некоторое число) полученные многочлены $P^*(x)$ и $Q^*(x)$ также коммутируют друг с другом. (Если рассматривать многочлен как функцию, отображающую числовую прямую в себя, то указанное преобразование соответствует сдвигу на γ начала отсчета на прямой.) Любой многочлен 2-й степени со старшим коэффициентом 1 можно (выделив полный квадрат) указанным преобразованием привести к виду $P^*(x) = x^2 - \alpha$. Поэтому можно сразу считать, что $P(x) = x^2 - \alpha$, и действовать так же, как в пункте а).

Выписывая систему уравнений на коэффициенты $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$

из тождества $(Q(x))^2 - \alpha = Q(x^2 - \alpha)$, где $Q(x) = x^k + \beta_1 x^{k-1} + \beta_2 x^{k-2} + \dots + \beta_k$, получим прежде всего равенства $\beta_1 = \beta_2 = \dots = 0$, а далее – уравнения вида $\beta_2 = F_2$, $\beta_4 = F_4$, ..., где функция F_i зависит от α и от β_{2j} , $2j < i$, так что коэффициенты β_2, β_4, \dots находятся однозначно (лишь $[k/2]$ из k уравнений, полученных приравнованием коэффициентов при $x^{2k-2}, x^{2k-4}, \dots, x^2$ и свободного члена, используются для отыскания β_{2j} ; остальные – дополнительные условия, которые могут и не выполняться).

в) Это $P(P(x))$ и $P(P(P(x)))$.

г) Будем вместо $P(Q)$, $P(Q(R))$ писать $P \circ Q$, $P \circ Q \circ R$.

По условию $Q \circ P = P \circ Q$ и $R \circ P = P \circ R$, откуда

$$(Q \circ R) \circ P = Q \circ R \circ P = Q \circ P \circ R = P \circ Q \circ R = P \circ (Q \circ R),$$

$$(R \circ Q) \circ P = R \circ Q \circ P = R \circ P \circ Q = P \circ R \circ Q = P \circ (R \circ Q).$$

Мы видим, что многочлены $Q \circ R$ и $R \circ Q$ оба коммутируют с P . Поскольку они имеют одинаковую степень (произведение степеней R и Q), согласно б) они совпадают.

д) Методом математической индукции можно доказать, что для любого $k \geq 2$ существует многочлен P_k степени k такой, что

$$t^k + \frac{1}{t^k} = P_k \left(t + \frac{1}{t} \right);$$

в частности,

$$t^2 + \frac{1}{t^2} = \left(t + \frac{1}{t} \right)^2 - 2, \quad t^3 + \frac{1}{t^3} = \left(t + \frac{1}{t} \right)^3 - 3 \left(t + \frac{1}{t} \right),$$

так что $P_2(x) = x^2 - 2$, $P_3(x) = x^3 - 3x$. При этом

$$\begin{aligned} t^{mn} + \frac{1}{t^{mn}} &= P_m \left(t^n + \frac{1}{t^n} \right) = P_n \left(t^m + \frac{1}{t^m} \right) = \\ &= P_m \left(P_n \left(t + \frac{1}{t} \right) \right) = P_n \left(P_m \left(t + \frac{1}{t} \right) \right) = P_{mn} \left(t + \frac{1}{t} \right); \end{aligned}$$

из этих тождеств следует, что $P_m \circ P_n = P_n \circ P_m = P_{mn}$.

∇ Эти многочлены получаются простой заменой переменных из многочленов Чебышёва T_k , определяемых тождествами

$$\cos k\varphi = T_k(\cos \varphi), \quad k = 2, 3, \dots; \quad P_k(x) = 2T_x(x/2).$$

Подробное обсуждение свойств многочленов Чебышёва см. в статье [68].

252. Ответ: 88.

Каждое число $k = 1, 2, 3, \dots$ встречается в последовательности (a_n) $2k$ раз, поскольку условие $a_n = k$ эквивалентно тому, что

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{n} < k + \frac{1}{2}, \text{ или } k^2 - k < n \leq k^2 + k.$$

Поэтому в сумме

$$\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} + \frac{1}{a_5} + \frac{1}{a_6}\right) + \dots + \left(\frac{1}{a_{44 \cdot 43+1}} + \dots + \frac{1}{a_{44 \cdot 45}}\right)$$

каждая из 44 круглых скобок равна $2k \cdot 1/k = 2$.

253. Пусть E – вершина треугольника ADE , полученного переносом треугольника BMC (на вектор \overline{BA} , рис.10). Тогда

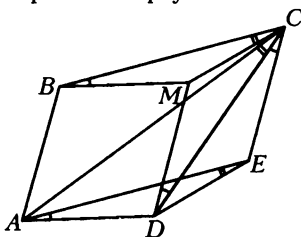


Рис. 10

$MDEC$ – параллелограмм, углы EAD , CBM , CDM , ECD равны и точки A , C , E и D лежат на одной окружности. Следовательно, равны также углы ACD , AED и BCM .

254. Если бы $1978^m - 1$ делилось на $1000^m - 1 = d$, то и число $1978^m - 1000^m = 2^m$ ($989^m - 500^m$) делилось бы на d . Но это невозмож-

но, так как $989^m - 500^m < d$ и d нечетно.

255. а) Ответ: $n = 7$.

Множество K_n , состоит из точек прямой AB , удаленных от A и B на целочисленные расстояния, причем крайние его точки удалены от середины отрезка AB на расстояние $3^n/2$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), т.е. от A – на расстояния $(3^n - 1)/2$ и $(3^n + 1)/2$. Поскольку $(3^6 + 1)/2 = 365 < 1000$, а $(3^7 + 1)/2 > 1000$, искомое множество – K_7 .

б) Многоугольники, являющиеся выпуклыми оболочками (см. П17) множеств K_1, K_2, \dots – шестиугольники (рис.11,а). Вершины выпуклой оболочки K_n получаются так: надо взять каждую пару вершин треугольника ABC и проделать с ней n операций «симметричного отражения» – как в задаче а). Чтобы доказать, что все точки K_n лежат в пределах выпуклой оболочки H_n шести построенных «крайних точек», удобно рассмотреть H_n как пересечение трех полос, края которых идут по противоположным сторонам шестиугольника H_n ($n = 1, 2, 3, \dots$). Первоначальный треугольник ABC можно также рассматривать как пересечение трех полос; полосы, у которой один край идет

по прямой AB , а другой переходит через точку C , и двух аналогичных. Все симметричные отражения полосы относительно любой ее точки принадлежат полосе с той же осью, но в три раза большей ширины. Пользуясь этим, можно доказать, что K_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) принадлежит каждой из трех полос, в пересечении дающих H_n .

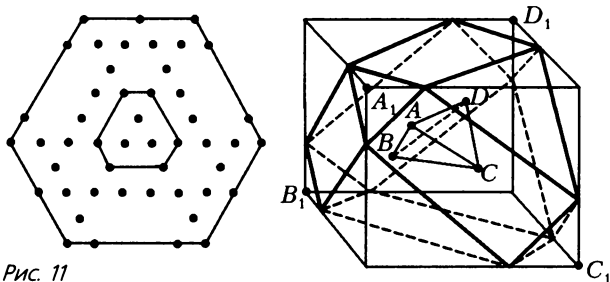


Рис. 11

Площадь H_n можно подсчитать как комбинацию площадей треугольников, гомотетичных ABC . Она равна $(3^{2n+1} - 1)/2$.

в) Множество K_1 содержит, кроме точек K_0 , еще 12 точек, полученных отражением одной из вершин тетраэдра $ABCD$ относительно другой. Удобно представить эти 12 «крайних» точек K_1 , построив куб L_0 , у которого точки A, B, C, D — несмежные вершины, и гомотетичный L_0 относительно центра с коэффициентом 3 куб L_1 с соответствующими вершинами A_1, B_1, C_1, D_1 : 12 точек K_1 лежат по одной на ребрах L_1 и делят их, считая от вершин A_1, B_1, C_1, D_1 , в отношении 1 : 2. Если от каждой вершины L_1 плоскостью, проходящей через 3 «крайние» точки на выходящих из этой вершины ребрах, отрезать пирамиду, то оставшийся многогранник M_1 — выпуклая оболочка K_1 — будет иметь 14 граней: 6 прямоугольников $a \times 2a$ (где a — длина ребра тетраэдра $ABCD$) и 8 правильных треугольников — четыре со стороной a и 4 со стороной $2a$ (рис.11,б).

г) Объем M_1 можно подсчитать, вычтя из объема куба (81) объем отрезаемых частей $\left(4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 4 = 18\right)$. Он равен 63.

д) Выпуклая оболочка M_n множества K_n будет выпуклым многогранником с вершинами в 12 «крайних» точках, построенных для каждой пары вершин тетраэдра $ABCD$. Вершины M_n лежат по одной на ребрах куба L_n , полученного из L_0 центральной гомотетией с коэффициентом 3^n , и делят их в отношениях $(3^n - 1) : (3^n + 1)$.

В доказательстве удобно рассмотреть 7 полос, в пересечении дающих M_n : каждая из них получается раздутием в 3^n раз из полосы, края которой содержат все четыре вершины тетраэдра $ABCD$. Объем M_n равен $(5 \cdot 3^{3n} - 3^{n+1})/2$.

256. а) Пусть $m \geq 2n$. Покажем, что 1-й игрок может сделать в позиции (m, n) такой ход, что полученная позиция станет (для 2-го игрока) проигрышной. Если позиция $(m - n, m)$ – проигрышная, то искомый ход: $(m, n) \rightarrow (m - n, m)$. Если же эта позиция выигрышная, то в ней существует ход, превращающий ее в проигрышную. Поскольку $m - n \geq n$, этот ход имеет вид $(m - n, n) \rightarrow (m - kn, n)$, где k – некоторое натуральное число. Но тогда искомый выигрышный ход 1-го игрока: $(m, n) \rightarrow (m - kn, n)$.

Любопытно, что здесь удастся доказать, что позиция (m, n) при $m \geq 2n$ выигрышная, не предъявляя в явном виде выигрышающей стратегии.

б) **Ответ:** при $\alpha \geq (1 + \sqrt{5})/2$.

Каждой позиции (m, n) , где $m \geq n$, поставим в соответствие точку $x = m/n \geq 1$ на числовой оси. При каждом ходе точка x смещается на некоторое целое число k влево; если она попадает в отрезок $0 < x < 1$, то заменяется на обратную: $x \rightarrow 1/x$; попадание в 0 – проигрыш. Отметим на оси отрезок $[1/\beta; \beta]$ длины 1; $\beta - \frac{1}{\beta} = 1$ при $\beta = (1 + \sqrt{5})/2$. Точки $x = m/n$, лежащие внутри этого отрезка, соответствуют проигрышным позициям, правее него – выигрышным; в самом деле, из такой точки можно очередным (выигрывающим!) ходом попасть в этот отрезок; если $1 < x < \beta$, то очередной ход выводит из отрезка, а если $x = 1$, то ведет к проигрышу. Поскольку наибольшее число спичек в коробках уменьшается, через несколько ходов игра обязательно закончится.

257. Условию задачи удовлетворяет последовательность $4\{n\sqrt{2}\}$, где $\{x\} = x - [x]$ – дробная часть числа x ($n = 1, 2, 3, \dots$). Действительно, если p и q – натуральные числа, $p < (4 - \sqrt{2})$, то

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| = \frac{|2q^2 - p^2|}{q(q\sqrt{2} + p)} > \frac{1}{4q^2},$$

поэтому при $m > k \geq 1$

$$|\{m\sqrt{2}\} - \{k\sqrt{2}\}| = |(m - k)\sqrt{2} - l| > \frac{1}{4(m - k)};$$

здесь

$$l = [m\sqrt{2}] - [k\sqrt{2}] < m\sqrt{2} - k\sqrt{2} + 1 \leq \\ \leq (m - k)(\sqrt{2} + 1) < (4 - \sqrt{2})(m - k).$$

∇ Здесь использован тот факт, что иррациональное число $\sqrt{2}$ плохо приближается дробями с небольшими знаменателями. Другое решение – например, конструкция последовательности с помощью десятичных дробей (см. «Квант», 1979, 5, с. 24) – значительно длиннее.

258. Поскольку $f(1) = f(0) = 1$, то свободный член $P_n(0)$ многочлена $P_n(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))\dots))}_n$ равен 1. Следовательно, при любом целом m остаток от деления $P_n(m)$ на m равен 1.

Заменив здесь m на $m' = P_k(m)$, получим, что $P_{n+k}(m)$ и $m' = P_k(m)$ взаимно просты.

∇ Из того факта, что существует последовательность $(P_n(2))$, все члены которой попарно взаимно просты, сразу следует бесконечность множества простых чисел.

259. Пусть M – любая точка пересечения графика $y = A \sin x$ с его образом $x = -A \sin y$ при повороте на 90° вокруг начала координат (рис.12). Тогда точка M и ее образы K , L и N при повороте вокруг O на 90° , 180° и 270° принадлежат графику $y = A \sin x$, так что квадрат $MKLN$ вписан в данный график. При достаточно большом A точку M пересечения графиков можно выбрать более чем 1978 способами, причем на различных расстояниях от точки O ; например, при $A > 1978 \cdot 2\pi$ можно взять по одной точке пересечения k -й волны исходной и k -й волны повернутой траектории (волны отсчитываются от O). Здесь используется теорема о существовании корня у непрерывной функции, меняющей знак (см. П5): из нее нетрудно вывести тот наглядно очевидный факт, что на указанных участках графики пересекаются.

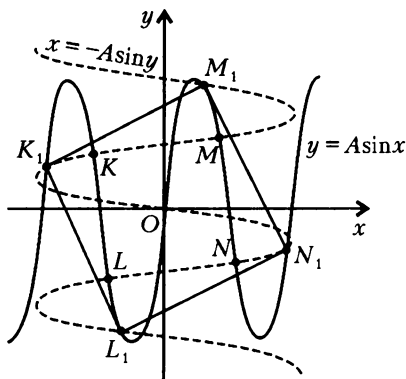


Рис 12

260. а) Ответ: можно.

Сначала получаем карточку (1; 8):

$$(5; 19) \rightarrow (6; 20) \rightarrow (3; 10) \rightarrow \dots \rightarrow (10; 17) \rightarrow (3; 17) \rightarrow \\ \rightarrow (4; 18) \rightarrow (2; 9) \rightarrow \dots \rightarrow (9; 16) \rightarrow (2; 16) \rightarrow (1; 8),$$

а из нее уже легко получить карточки (1; 15), (1; 22), ..., (1; $1 + 7k$) при любом натуральном k .

б) Ответ: нельзя. При любых операциях разность чисел на карточках будет делиться на 7.

в) Ответ: пусть d – наибольший нечетный делитель разности $b - a$; тогда из карточки $(a; b)$ можно получить $(1; n)$, только если $n = 1 + dk$ при некотором натуральном k .

Необходимость этого условия очевидна (доказывается аналогично пункту б)). Теперь достаточно доказать, что из $(a; b)$ можно получить $(1; 1 + d)$. Если a и b одной четности, то выполняема операция $(a; b) \rightarrow \left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$ или $\left(\frac{a+1}{2}; \frac{b+1}{2}\right)$; она дает пару с вдвое меньшей разностью и т.д. С парой $(a; a + d)$ можно проделать серию операций

$$(a; a + d) \rightarrow (a + d; a + 2d) \rightarrow \begin{cases} \left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2} + d\right) \\ \text{или} \\ \left(\frac{a+1}{2}; \frac{a+1}{2} + d\right), \end{cases}$$

она дает пару с той же разницей, но меньшими числами (если $a > 1$). Повторение этих серий, как в примере а), приведет к паре $(1; 1 + d)$.

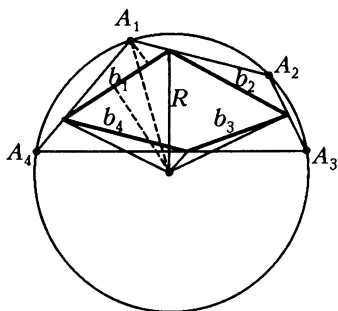


Рис. 13

261. Пусть A_i – вершины вписанного n -угольника ($i = 1, 2, \dots, n$); b_i – отрезок, соединяющий две отмеченные точки на его сторонах, выходящих из A_i , O – центр круга (рис.13); s_i и s'_i – площади треугольников с основанием b_i , вершинами которых служат A_i и O , причем s'_i берется со знаком минус, если A_i и O лежат по одну сторону от прямой, содержащей b_i . Тогда

$s_i + s'_i \leq b_i R/2$ для каждого i и сумма $s'_1 + s'_2 + \dots + s'_n$ равна площади многоугольника с вершинами в отмеченных точках (знак «+» или «-» числа показывает, изнутри или снаружи из точки O видна сторона b_i). Поэтому

$$S = s_1 + s_2 + \dots + s_n + s'_1 + s'_2 + \dots + s'_n \leq (b_1 + b_2 + \dots + b_n) R/2.$$

262. а) Если n четно, то всю доску можно разбить на прямоугольнички размером 1×2 клетки («домино»). Начинаящий всегда будет иметь возможность сделать ход (и тем самым выиграет), если он будет следовать такой стратегии: если фишка стоит на одной из клеток какого-то домино, то он ставит ее на вторую клетку того же домино («закрывает» домино).

Если n нечетно, то можно разбить на домино все клетки доски, кроме начальной – угловой. Теперь аналогичная стратегия будет выигрышной для второго игрока.

б) **Ответ:** всегда выигрывает начинающий. При четном n стратегия та же, что в а). При нечетном n нужно снова разбить на домино все клетки, кроме угловой; раскрасив доску в шахматном порядке, легко убедиться, что на угловую клетку второй никогда пойти не сможет, поэтому первый выигрывает, следуя той же стратегии «закрывания» домино.

263. Ответ: не всегда.

На рисунке 14 изображен пример 6 отрезков – 3 коротких и 3 длинных, которые нельзя включить нужным образом в несамопересекающуюся (даже незамкнутую) ломаную. В самом деле, один из коротких отрезков – не крайний в ломаной, но его концы могут быть соединены лишь с концами близлежащего длинного.

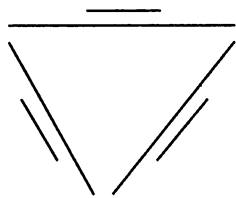


Рис. 14

264. Первое решение. Пользуясь неравенством $ab \leq (a+b)^2/4$, для произвольного числа $c > 0$ имеем:

$$\begin{aligned} P &= (x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) = \\ &= \left(\frac{x_1}{c} + \dots + \frac{x_n}{c} \right) \left(\frac{c}{x_1} + \dots + \frac{c}{x_n} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\frac{x_1}{c} + \frac{c}{x_1} + \frac{x_2}{c} + \frac{c}{x_2} + \dots + \frac{x_n}{c} + \frac{c}{x_n} \right)^2. \end{aligned}$$

Заметим, что функция $f(t) = \frac{c}{t} + \frac{t}{c}$ принимает наибольшее на $[a; b]$ значение обязательно на том или другом конце промежутка; выберем c так, чтобы эти значения совпадали: $f(a) = f(b)$, т.е. возьмем $c = \sqrt{ab}$. Тогда при $a \leq t \leq b$ будет $f(t) \leq \sqrt{a} \sqrt{b} + \sqrt{b} \sqrt{a}$. Поэтому

$$P \leq n^2 (\sqrt{a} \sqrt{b} + \sqrt{b} \sqrt{a})^2 = 4n^2 (a+b) \sqrt{ab}.$$

Второе решение. Разместим на дуге гиперболы $y = 1/x$, $a \leq x \leq b$ в точках с абсциссами x_1, x_2, \dots, x_n одинаковые грузы. Центр масс этих грузов — точка с абсциссой

$$p = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)/n \text{ и ординатой } q = \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) / n$$

— будет лежать в пределах сегмента, ограниченного дугой гиперболы и отрезком, соединяющим ее концы. Ясно, что точку $(p; q)$ в этом сегменте, для которой величина pq наи-

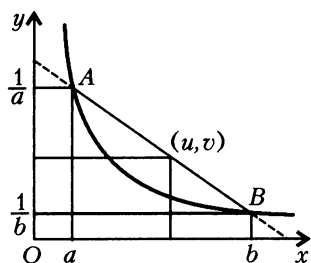


Рис. 15

большая, нужно искать на отрезке — верхней границе сегмента (рис. 15). Для точек $(p; q)$ прямой, содержащей этот отрезок, q можно записать как линейную функцию от p , тогда pq будет квадратным трехчленом от p (обращающимся в 0 при $p = 0$). Чтобы не выписывать его в явном виде — хоть это и нетрудно, — заметим, что при $p = a$ и $p = b$ он принимает равные

значения $a \cdot \frac{1}{a} = b \cdot \frac{1}{b} = 1$; следовательно, наибольшее значение он принимает посередине между этими точками и оно равно $(a+b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) / 4$. Отсюда следует нужное неравенство.

▽ Из второго решения легко вывести побочный результат: отрезки любой прямой между точками пересечения с гиперболой $y = 1/x$ и ее «асимптотами» — осями координат (показанные на рисунке пунктиром) равны.

Возвращаясь к исходной задаче, заметим, что при четном n неравенство дает точную оценку левой части, а при нечетном ее можно несколько уточнить. (Для $n = 5$ эта задача предлагалась на олимпиаде США, см. задачу 7.22 в книге [41].)

265. В качестве требуемого множества можно взять множество, состоящее из точек $A_k = (k; r(k))$, $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$, где

$r(k)$ – остаток от деления k^2 на p . Для $p = 7$ это множество показано на рисунке 16.

Если бы какие-то три точки A_l, A_m, A_n ($l < m < n < p$) лежали на одной прямой, то выполнялось бы соотношение

$$\frac{r(m) - r(l)}{m - l} = \frac{r(n) - r(m)}{n - m},$$

т.е. для некоторых целых a и b выполнялось бы равенство

$$(n - m)(m^2 - l^2 + ap) = (m - l)(n^2 - m^2 + bp).$$

Переносим члены, не содержащие p , в левую часть равенства, видим, что $(n - m)(m - l)(n - l)$ делится на p . Поскольку p простое, это невозможно.

Если бы какие-то четыре точки A_k, A_l, A_m, A_n лежали в вершинах параллелограмма, $\overline{A_k A_l} = \overline{A_n A_m}$, то выполнялись бы равенства $l - k = m - n$ и $r(l) - r(k) = r(m) - r(n)$, т.е. число $(l^2 - k^2) - (m^2 - n^2)$ делилось бы на p . Тогда число

$$(l + k) - (m + n) = 2l - 2m,$$

а поскольку $p > 3$, и $l - m$ также должно было бы делиться на p , что невозможно.

266. Проведем через два противоположные ребра a и b тетраэдра параллельные плоскости p и p' . Пусть h – расстояние между ними. Будем рассматривать лишь проекции тетраэдра на плоскости q , перпендикулярные p , и уже среди них найдем такие, отношение площадей которых не меньше $\sqrt{2}$. Проекцией тетраэдра на плоскость q служит трапеция с основаниями a'_q и b'_q – проекциями a и b на q , высотой h (в частном случае, если проекция одного из ребер – a или b – состоит из одной точки, трапеция вырождается в треугольник); площадь проекции равна $(a'_q + b'_q)h/2$. Чтобы проследить, как зависит эта величина от наклона ребер a и b к плоскости q , рассмотрим векторы \vec{a} и \vec{b} , изображаемые ребрами тетраэдра (рис.17). Можно очевидно, считать, что $a \geq b$ и угол γ между векторами \vec{a} и \vec{b} не превосходит 90° . Отложим их от одной точки O – тогда вместо длин проекций на плоскость q ребер тетраэдра мы можем говорить о длинах проекций векторов \vec{a} и \vec{b} на прямую (в плоскости, параллельной p и p'). Сумма проекций на прямую

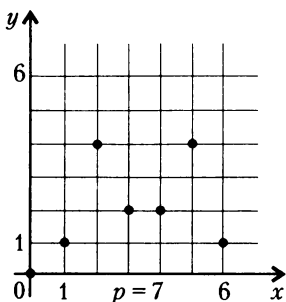


Рис. 16

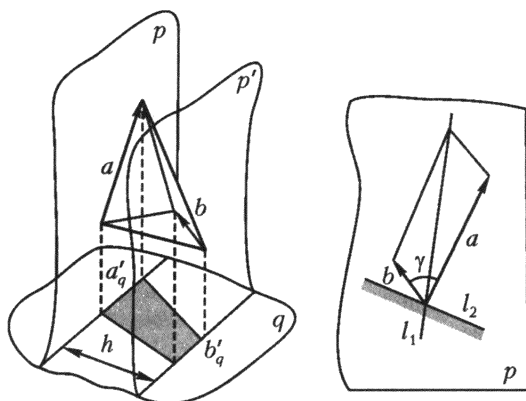


Рис. 17

l_1 , параллельную вектору $\vec{a} + \vec{b}$, равна $|\vec{a} + \vec{b}|$, а на прямую l_2 , перпендикулярную \vec{a} , $b \sin \gamma$; отношение этих двух величин не меньше $\sqrt{2}$:

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 + 2ab \geq a^2 + b^2 \geq 2b^2 \geq 2b^2 \sin^2 \gamma.$$

∇ Заметим, что для правильного тетраэдра оценка $\sqrt{2}$ — наилучшая: площадь любой его проекции заключена между $a^2/2$ и $a^2/(2\sqrt{2})$, где a — длина ребра.

267. Положим

$$f(x) = (x - a_1)^2 + \dots + (x - a_n)^2.$$

Выделив в этом квадратном трехчлене полный квадрат, получим

$$f(x) = n(x - b_n)^2 + f(b_n); \quad (*)$$

при проверке этого равенства нужно учесть, что

$$nb_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

При $n = 1$ нужные неравенства очевидны ($C = D$). Чтобы доказать их, пользуясь методом математической индукции, достаточно доказать неравенства

$$0 \leq f(b_{n+1}) - f(b_n) \leq (a_{n+1} - b_{n+1})^2,$$

поскольку при добавлении к a_1, a_2, \dots, a_n еще одного числа a_{n+1} величина C возрастает на $(a_{n+1} - b_{n+1})^2$, а D — на $(a_{n+1} - b_{n+1})^2 + f(b_{n+1}) - f(b_n)$. Левое неравенство сразу вытекает

из равенства $(*)$ при $x = b_{n+1}$; правое следует из равенств

$$(n+1)b_{n+1} = nb_n + a_{n+1}, \quad n(b_{n+1} - b_n) = a_{n+1} - b_{n+1},$$

$$f(b_{n+1}) - f(b_n) = n(b_{n+1} - b_n)^2 = (a_{n+1} - b_{n+1})^2 / n.$$

∇ Тожество $(*)$, выражающее суммы квадратов расстояний до n точек через квадрат расстояния до их «центра масс» (или «среднего значения»), постоянно используется в теории вероятностей, статистике, а его аналоги на плоскости и в пространстве – и в геометрии,

268. Рассмотрим вместе с числом $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ «сопряженные», отличающиеся от него знаками радикалов: $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$ и $\lambda_4 = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{3}$. Если

$$\lambda_1^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

то, как можно проверить последовательно для $n = 1, 2, 3, 4, \dots$,

$$\lambda_2^n = q_n - r_n\sqrt{2} + s_n - t_n\sqrt{6},$$

$$\lambda_3^n = q_n + r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6},$$

$$\lambda_4^n = q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}.$$

Сложив эти четыре равенства, поделив сумму на $4\lambda_1^n$ и перейдя к пределу, получим $\lim(q_n/\lambda_1^n) = 1/4$, поскольку $|\lambda_j| < \lambda_1$, для $j = 2, 3, 4$, и потому $\lim(|\lambda_j|^n/\lambda_1^n) = 0$. Прибавив к первому равенству одно из трех других и вычтя два оставшихся, мы получим: $\lim(r_n\sqrt{2}/\lambda_1^n) = \lim(s_n\sqrt{3}/\lambda_1^n) = \lim(t_n\sqrt{6}/\lambda_1^n) = 1/4$ (таким образом, в сумме $q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$ при больших n все слагаемые примерно равны друг другу!). Отсюда находим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n/q_n) = 1/\sqrt{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (s_n/q_n) = 1/\sqrt{3}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (t_n/q_n) = 1/\sqrt{6}.$$

∇ Отметим, что ответ в этой задаче получился бы тем же самым, если бы вместо $1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$ стояло любое число $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ с натуральными a, b, c, d .

269. Ответ: $1/5$. Нужно рассмотреть два случая: вершина прямого угла меньшего треугольника может лежать или на гипотенузе, или на катете большего. В первом случае отношение катетов двух треугольников не меньше $1/2$, отношение их площадей – $1/4$. Во втором случае, зафиксировав меньший треугольник и пользуясь тем, что вершины большего будут пробегать дуги окружностей, можно получить чисто геометри-

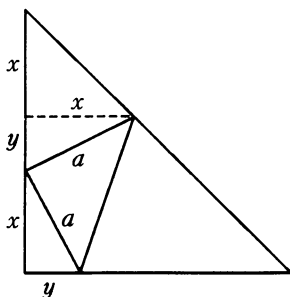
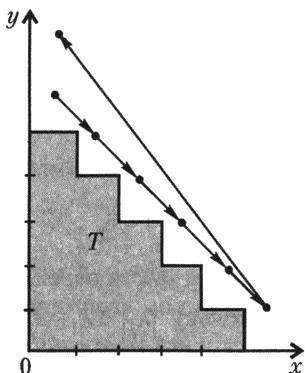


Рис. 18



ческое решение; еще проще аналитическое решение: если проекции катета меньшего треугольника на катеты большего равны x и y (рис.18), то $x^2 + y^2 = a^2$, а катет большего равен $2x + y \leq a\sqrt{5}$.

270. Ответ: множество точек, из которых нельзя ускакать «в бесконечность», имеет площадь 15; это — ступенчатая фигура T , изображенная на рисунке 19.

Из любой точки вне T можно несколькими шагами $(1; -1)$ попасть в область $x \geq 5$, а затем делать шаги $(-5; 7) + 5(1; -1) = (0; 2)$.

∇ Еще более интересные формы фигур образуются в этой задаче, если число разрешенных прыжков 3 и больше.

271. Рассадим сначала парламентариев по двум палатам произвольным образом. Если в какой-то палате у ее члена A не менее двух врагов, то в другой палате у A не более одного врага. Пересадим A в другую палату; при этом суммарное

количество s пар врагов в той и другой палате уменьшается. Поскольку s — целое неотрицательное число, такое уменьшение A может быть проделано лишь конечное число раз, и в результате получится требуемое разбиение на палаты.

272. Легко получаются все двоично-рациональные числа: дроби со знаменателями 2, 4, 8, 16 и т.д.

Для того чтобы из пары $(0; 1)$ получить дробь $1/n$, достаточно выбрать n различных двоично-рациональных чисел с суммой 1 и взять их среднее арифметическое; например, для $n = 5$:

$$\frac{1}{5} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{3}{4^4} + \frac{1}{4^4}}{5}$$

(аналогичный набор строится для любого n).

Заметим теперь, что если мы умеем по некоторому плану из пары чисел $(0; 1)$ получать t , то по тому же плану из пары чисел $(1; 0)$ мы получим $1 - t$ (всюду числа x заменятся на $1 - x -$

операция «среднее арифметическое» сохраняет эту замену), а из пары $(0; r)$ по тому же плану мы получим rt (всюду x заменится на rx). Таким образом, если мы получили уже $1/n$ и все числа $k/(n-1)$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, то можем получить $1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$ и все $\frac{k}{n} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{k}{n-1}$.

273. Рассмотрим отрезки ряда чисел x_m/m , $k^2 \leq m \leq (k+1)^2 - 1$ ($k = 1, 2, 3, \dots$), k -й отрезок состоит из $(k+1)^2 - k^2 = 2k+1$ чисел от x_{k^2}/k^2 до $x_{(k+1)^2-1}/((k+1)^2-1)$.

Заменив каждый член x_m/m в k -м отрезке наибольшим первым членом отрезка x_{k^2}/k^2 , получим, что сумма чисел этого отрезка не больше

$$\frac{(2k+1)x_{k^2}}{k^2} \leq \frac{3kx_{k^2}}{k^2} = \frac{3x_{k^2}}{k}.$$

Теперь для любого натурального n получаем

$$\frac{x_1}{1} + \frac{x_2}{2} + \dots + \frac{x_n}{n} \leq 3 \left(\frac{x_1}{1} + \frac{x_4}{2} + \frac{x_9}{3} + \dots + \frac{x_{q^2}}{q} \right),$$

где q – наименьшее число, для которого $q^2 > n$.

274. Выберем где угодно точку O и представим каждый из взятых векторов \overline{AB} как $\overline{OB} - \overline{OA}$. В сумме всех векторов каждый вектор OM , где M – одна из данных точек, будет встречаться со знаком «минус» столько же раз, сколько со знаком «плюс», так что вся сумма равна 0.

275. Ответ: а) при $n = 8 - 16$ фишек; б) при n четном – $2n$, при n нечетном – $2n + 1$.

Расположение такого количества фишек ясно из рисунка 20, а, б. Доказательство того, что меньшим числом обойтись нельзя,

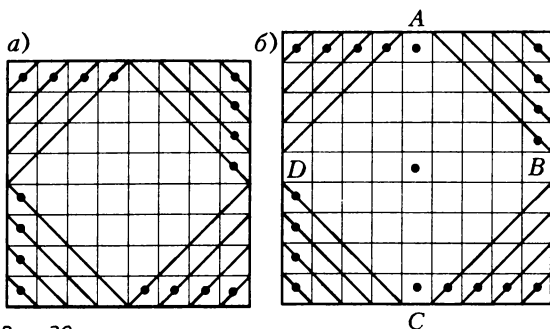


Рис. 20

проще для четного n ; на каждой прямой, параллельной одной диагонали, должно стоять по фишке, а на самой диагонали – две (в углах).

Другое доказательство: на каждой показанной на рисунках пунктиром прямой должно стоять по фишке. Именно это доказательство переделывается на случай нечетного n (рис.20,б): кроме $2n - 2$ пунктирных прямых (на каждой – по фишке), следует рассмотреть еще шесть прямых, соединяющих центры клеток A, B, C, D ; на них нужно потратить еще не менее 3 фишек.

$$276. \text{ Ответ: } x = \frac{a + b\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{1 - a^2 + b^2}}; \quad y = \frac{b + a\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{1 - a^2 + b^2}}.$$

Складывая и вычитая данные уравнения, а потом перемножая результаты, получим такое следствие системы:

$$x^2 - y^2 = a^2 - b^2, \text{ т.е. } \sqrt{x^2 - y^2} = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Подставляя это в исходную систему и решая ее (как линейную), найдем ответ. То, что полученные формулы совпадают с исходными с заменой a на x , b на $-y$, позволяет не делать проверку: из формул ответа получаются, как следствие, аналогичные формулы с заменой x на a , y на $-b$, т.е. исходная система.

▽ Заметим, что ничего не изменилось бы, если бы вместо данной системы рассматривалась такая:

$$\frac{x - yf(x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - f^2(x^2 - y^2)}} = a, \quad \frac{y - xf(x^2 - y^2)}{\sqrt{1 - f^2(x^2 - y^2)}} = b,$$

где f – любая функция, не превосходящая по модулю 1. Суть этой задачи в том, что «преобразование Лоренца»

$$(x, y) \rightarrow (x', y'), \quad x' = \frac{x - vy}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad y' = \frac{y - xv}{\sqrt{1 - v^2}},$$

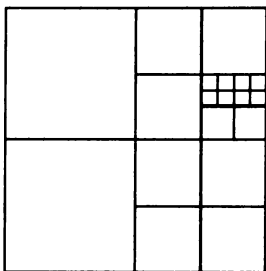


Рис. 21

играющее основную роль в теории относительности Эйнштейна, сохраняет величину $x^2 - y^2$:

$$x^2 - y^2 = (x')^2 - (y')^2.$$

277. Если покрывать квадрат набором квадратов, сторона каждого из которых уменьшена до ближайшего меньшего числа вида $1/2^k$, $k = 1, 2, \dots$, то эти квадраты можно разместить без наложений (рис.21). Поскольку пло-

щадь каждого уменьшилась менее чем в 4 раза, то сумма их площадей больше 1, так что они заведомо покрывают весь квадрат.

278. Положим $s = x_1 + x_2 + \dots + x_n$.

Поскольку $x_i \geq x_i^2$ для каждого $i = 1, 2, \dots, n$, то нужное неравенство следует из такого: $(s+1)^2 \geq 4s$, эквивалентного, очевидно, $(s-1)^2 \geq 0$.

279. Поскольку p и q взаимно просты, то каждое из них взаимно просто с $n = p + q$. Поэтому все числа

$$\frac{i}{p}, \frac{j}{q}, \frac{i+j}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, p-1; j = 1, 2, \dots, q-1)$$

различны. Заметим, что всегда $\frac{i+j}{p+q}$ лежит между $\frac{i}{p}$ и $\frac{j}{q}$;

поэтому ясно, что все дроби $\frac{i}{p}, \frac{j}{q}$ лежат в разных отрезках

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right], \quad k = 1, 2, \dots, n-2.$$

280. Пусть e_i — единичный вектор, направленный по прямой l_i . Положим $e_i e_{i+1} = c_i$ ($i = 1, 2, \dots, 1978$), $e_{1979} e_1 = c_{1979}$ (c_i — косинус угла между e_i и следующим по номеру вектором e_{i+1}); пусть $\overline{OA_i} = a_i e_i$. Условие перпендикулярности прямых $A_{i-1} A_{i+1}$ и l_i эквивалентно таким:

$$(a_{i-1} e_{i-1} - a_{i+1} e_{i+1}) e_i = 0, \quad a_{i-1} c_{i-1} = a_{i+1} c_i. \quad (*)$$

Мы можем, взяв a_1 произвольно, выбрать $a_3, a_5, \dots, a_{1979}, a_2, a_4, \dots, a_{1978}$ так, чтобы выполнялись все 1979 условий (*), кроме, быть может, одного: $a_{1978} c_{1978} = a_1 c_{1979}$. Но, перемножив все 1978 равенств

$$\frac{a_3}{a_1} = \frac{c_1}{c_2}, \frac{a_5}{a_3} = \frac{c_3}{c_4}, \dots, \frac{a_{1979}}{a_{1977}} = \frac{c_{1977}}{c_{1978}},$$

$$\frac{a_2}{a_{1979}} = \frac{c_{1979}}{c_2}, \frac{a_4}{a_2} = \frac{c_2}{c_3}, \dots, \frac{a_{1978}}{a_{1976}} = \frac{c_{1976}}{c_{1977}},$$

мы как раз получим после сокращений недостающее 1979-е равенство.

281. Указанную в условии задачи величину

$$p_k = a_1 a_{k+1} + a_2 a_{k+2} + \dots + a_{n-k} a_n$$

удобно подсчитывать так: последовательность $A_n = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ из 0 и 1 подписывается сама под собой со сдвигом на k разрядов; при этом $p_k = p_k(A_n)$ — число разрядов, в которых в обеих строках стоят единицы.

Последовательность A_n длины n удовлетворяет условию задачи, если все $p_k(A_n)$ при $0 \leq k \leq n-1$ нечетны.

Следующая конструкция позволяет по двум таким последовательностям A_m и A_n построить $A_l = A_n \sqcup A_m$ длины $l = (2m-1)n - (m-1) = 2mn - m - n + 1$. Заменяем каждую 1 в A_n на блок $A_m \underbrace{0 \dots 0}_{m-1}$ из $2m-1$ цифр, каждый 0 в A_n — на блок из

$2m-1$ нулей, а последние $m-1$ нулей отбросим. При подсчете p_k для A_l указанным выше способом при любом сдвиге k каждый блок A_m в верхней строке задевает лишь один блок A_m в нижней; если $k = (2m-1)q + r$ или $k = (2m-1)q - r$, где $0 \leq r \leq m-1$, $0 \leq q \leq n-1$, то $p_k(A_l) = p_q(A_n) \cdot p_r(A_m)$, поскольку ровно $p_q(A_n)$ пар блоков A_m задевают друг друга и при этом они сдвинуты на r разрядов: отсюда ясно, что построенная последовательность $A_l = A_n \sqcup A_m$ удовлетворяет условию задачи вместе с A_n и A_m .

Эта конструкция позволяет из $A_4 = 1101$ изготовить ответ $A_{25} = A_4 \sqcup A_4$ к пункту а):

$$A_{25} = \underline{1101000} \underline{1101000} \underline{000000} \underline{1101}.$$

Далее, $A_{25} \sqcup A_{25}$ имеет уже $2 \cdot 25^2 - 50 + 1 = 1201$ — более 1000 цифр, что и требуется в пункте б).

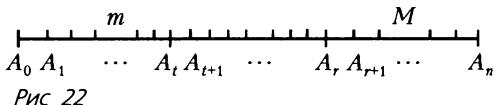
∇ Существуют и другие серии последовательностей, удовлетворяющих условию задачи. Одну из них придумал участник олимпиады А.А.Разборов. Интересно получить их полное описание. Аналогичную задачу можно рассматривать и на окружности.

282. Предположим, что диагонали четырехугольника $ABCD$, пересекающиеся в точке O , не перпендикулярны друг другу, например, что угол AOB острый. Построим точки A' и B' , симметричные A и B относительно точки O . Радиусы окружностей, вписанных в треугольники $A'OB$ и $B'OC$, меньше радиуса r окружности, вписанной в $\triangle AOB$ (площади всех этих треугольников равны, а периметр $\triangle AOB$ меньше), поэтому касательные, проведенные из точек A и B к окружностям радиуса r , вписанные в углы BOC и AOD , пересекают лучи OA' и OB' в точках C и D , расположенных дальше от O , чем A' и B' соответственно, так что отрезок CD не может коснуться окружности радиуса r , вписанной в $\triangle OA'B'$.

Таким образом, в условиях задачи прямые AC и BD перпендикулярны друг другу и, с учетом равенства радиусов вписанных окружностей, служат осями симметрии четырехугольника $ABCD$. Следовательно, этот четырехугольник — ромб.

283. а) Рассмотрим возможные расстановки T пары красных точек (A_l, A_r) , делящих отрезок A_0A_n на три части A_0A_l , A_lA_r , A_rA_n ; наибольшую из длин этих частей обозначим M , наименьшую m . Из всех расстановок T выберем такие, для которых M минимальна, а из них – ту (или одну из тех), для которых m максимальна. Докажем, что для такой расстановки $T = (A_l, A_r)$ будет выполнено условие $M - m \leq 1$.

Пусть для нее $M - m > 1$. Если ее части M и m расположены рядом, то, передвинув красную границу между ними на один отрезок, мы получим расстановку T' , у которой наименьшая часть больше m и (возможно, или) наибольшая – меньше M , что противоречит выбору T . Если $m = A_0A_l$, $M = A_rA_n$, то либо у расстановки (A_{l+1}, A_r) наименьшая часть больше m , либо $A_{l+1}A_r \leq m < M - 1$ и тогда у расстановки (A_{l+1}, A_{r+1}) наибольшая часть меньше M : и то, и другое противоречит выбору $T = (A_l, A_r)$ (рис.22).



б) Рассмотрим расстановку, у которой наибольшая по длине из k частей $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k$ равна M , а наименьшая равна $m < M - 1$. Пусть $\Delta_i = m$ лежит левее $\Delta_j = M$. Передвинем правый конец части Δ_i на один или несколько отрезков так, чтобы она стала не меньше $M - 1$ (но не больше M). Если теперь $\Delta_{i+1} < M - 1$, сделаем с ней то же самое, затем перейдем к Δ_{i+2} и т.д., пока либо длины всех частей $\Delta_i, \Delta_{i+1}, \dots, \Delta_{j-1}$ не будут больше или равны $M - 1$, либо нам удастся уменьшить $\Delta_j = M$ хотя бы на один отрезок. Затем (если в полученной расстановке по-прежнему $M - m > 1$) проделаем ту же процедуру еще несколько раз. При этом мы не можем повториться, поскольку вновь получаемая расстановка «лучше» в том смысле, что у нее либо строго меньше длина наибольшей части M , либо M одинаковы, но меньше число частей, равных M , либо и это число одинаково, но тогда больше m или (при равных m) меньше частей, равных m . Поскольку всего расстановок конечное число, после нескольких повторений процедуры мы придем к расстановке, которую «улучшить» невозможно, т.е. $M - m \leq 1$.

284. Ответ: делится. Данное число, очевидно, делится на 20. Делимость на 99 следует из того, что $100 = 99 + 1$, и равенства $19 + 20 + \dots + 80 = 99 \cdot 31$.

285. Если S_1 и S_2 – суммы площадей левых частей с четными и нечетными номерами, а S_3 и S_4 – аналогичные суммы для

правых частей, то

$$S_2 + S_4 = S_3 + S_1 = S_3 + S_4 = S_1 + S_2.$$

286. Достаточно доказать, что в любой момент можно погрузить контейнер массой не большей 0,5 тонны.

287. $S_{ABCD} = 2S_{AMPC}$. Пусть $AM = x$, тогда

$$S_{AMCD} < 2S_{AMP} \leq x(a-x) \leq \frac{a^2}{4}.$$

288. Ответ: не имеет. Из $y^3 = (z^2 - x)(z^2 + x)$ и простоты y получаем либо $z^2 - x = 1$, $z^2 + x = y^3$, либо $z^2 - x = y$, $z^2 + x = y^2$. Обе системы не имеют решений в простых числах.

289. Ответ: пусть O – центр данной окружности, R – ее радиус и $OE = a$. Если $a \geq R/\sqrt{2}$, то искомая хорда BD стягивает дугу в 90° и касается окружности радиуса $R/\sqrt{2}$ с центром O . Если $a < R/\sqrt{2}$, искомая хорда перпендикулярна диаметру AC . Достаточно заметить, что $S_{ABCD} = \frac{2R}{a} S_{BOD}$, а $S_{BOD} = 1/2 R^2 \sin \varphi$, где $\varphi = \angle BOD$, и найти наибольшее значение $\sin \varphi$ в зависимости от положения точки E .

290. Пусть A, B и C – три последовательных пункта на берегу озера. Из условия следует, что A и B соединены тогда и только тогда, когда B и C не соединены. Таким образом, все пункты разбиваются на пары соседних, соединенных рейсом теплохода. При этом любые две такие пары соединены, т.е. один из пунктов первой пары соединен с некоторым пунктом второй пары.

291. Вместе с числом $N = \overline{abcdef}$ делятся на 37 числа $\overline{abc + def}$, \overline{bcafde} и \overline{cabdef} .

292. Ответ: $(\pi k; \pi l; \pi m)$, $k, l, m \in \mathbb{Z}$. Складывая первые два уравнения и вычитая из них третье, приходим к уравнению

$$\sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x+z}{2} \cdot \cos \frac{y+z}{2} = 0.$$

293. Если $\vec{S} \neq \vec{0}$ – сумма всех векторов системы, то для любого $\vec{a} \neq \vec{0}$ из этой системы $\vec{S} = k\vec{a}$, где k – некоторое число.

294. а) Ответ: $1962 + S(1962) = 1980$.

б) Если число n оканчивается на 9, то $S_{n+1} < S_n$, если не на 9, то $S_{n+1} = S_n + 2$. Для любого натурального $m > 2$ выберем наибольшее N , для которого $S_N < m$. Тогда $S_{N+1} \geq m$, причем последняя цифра N – не 9, и потому либо $S_{N+1} = m$, либо $S_{N+1} = m + 1$. Здесь $S_n = S(n) + n$.

295. Ответ: 33. Каждый прямоугольник 3×1 содержит ровно одну красную клетку.

296. а) Эпидемия не кончится, например, если в первый день для трех друзей А, В, С: у А иммунитет после прививки, В болен, а С здоров.

б) Если эпидемия не кончится, то найдется коротышка А, который раньше всех заболел вторично, но тогда заразивший его в этот раз коротышка В должен был заболеть вторично до А.

297. Ответ: не может. Последовательность n_k начиная с некоторого номера p стабилизируется, т.е. $n_p = n_{p+1} = \dots$

298. Ответ: $\angle DEC = 90^\circ$, $\angle EDC = 60^\circ$, $\angle DCE = 30^\circ$. При повороте на 60° около точки D в нужном направлении и гомотетии с коэффициентом $1/2$ с центром в D точка P переходит в середину H отрезка MP , B — в середину K отрезка BP , прямая BP — в прямую KH , пересекающую AP в точке E .

299. Числа α и β — корни квадратного трехчлена $f(t) = (t - \alpha)(t - \beta) = t^2 - \frac{1}{6}tp + \frac{1}{6}S$, причем $x < \frac{\alpha + \beta}{2} < z$, $f(x) > 0$ и $f(z) > 0$.

300. Ответ: $\{1; 2; 3; 5; 10; 20; 25; 50; 100\}$. Пусть $k_1 = 1 \leq k_2 \leq \dots \leq k_n = 100$ — данные числа. Так как $2k_i \geq k_{i+1}$, то $k_i \leq 2^{i-1}$ для любого i . В частности, $2^{n-1} \geq 100$, откуда $n \geq 8$. Из предположения, что $n = 8$, следует, что $k_7 = 50$, а $2k_5 = 25$. Противоречие.

301. Каждая из n^2 пар натуральных чисел $(x; y)$, где $1 \leq x \leq n$, $1 \leq y \leq n$, является решением некоторого уравнения $[x^{3/2}] + [y^{3/2}] = c$ ($1 \leq c \leq 2[n^{3/2}]$). Если при любом c число решений не больше M , то $2[n^{3/2}] \cdot M \geq n^2$, или $M \geq \frac{1}{2}\sqrt{n}$.

302. Проведем $BE \parallel CA$ и $AE \parallel BC$. Точки A, C, B, E и D лежат на сфере с диаметром AB и центром O , CE — тоже диаметр этой сферы, $\angle CDE = 90^\circ$, а $\cos \angle DCE = \frac{CN}{AB}$. Достаточно доказать, что $\sin \angle DBE > \sin \angle DCE$, применяя теорему синусов к треугольникам DBE и DCE .

303. а) При $k > m$ все числа имеют одинаковые первые m цифр после запятой.

б) **Ответ:** можно. В периодической дроби $x = 0,(10)$ на участках с номерами $10^n < k < 10^n + 5$ заменим группу цифр 1010 на 1100.

в) **Ответ:** $x = 0, x_1 x_2 \dots x_k \dots$, где $x_k = 1$ при $10^n < k \leq 10^n + 5$, а остальные $x_k = 0$.

304. Ответ: $32(\sqrt{2} - 1)$. Нужно воспользоваться тем, что при повороте на 90° одной из досок черные клетки сменяются белыми и наоборот, а при повороте обеих досок черные клетки сменяются белыми на обеих досках. Поэтому искомая площадь равна четверти площади восьмиугольника, образованного пересечением досок.

305. Достаточно доказать, что $\angle B_1 M A = \angle A A_1 B_1 = \angle A_1 B_1 B$.

306. а) $k = 3$; $720 = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 8 \cdot 9 \cdot 10$.

б) Если $m(m+1) = n(n+1)(n+2)(n+3)$, то $m^2 + m + 1 = (n^2 + 3n + 1)^2$, что невозможно,

307. Если в некотором столбце таблицы первые три числа, считая сверху, a , m и n , то каждое из чисел $1, 2, m-1, m$ встретится во второй строке левее числа m по крайней мере n раз, а любое число, большее m , встретится меньше чем n раз.

308. Ответ: $S = (1-a)\sqrt{1-a}$ при $a \leq 0$; $S = 1 - 2a$ при $0 < a < 1/2$; $S = 0$ при $a \geq 1/2$.

309. При повороте на 60° вокруг вершины C треугольник CAD перейдет в треугольник CBE , а при повороте на 60° вокруг точки H треугольник HBE перейдет в треугольник HDK .

310. Будем говорить, что жители $X, A_1, A_2, \dots, A_k, Y$ образуют цепочку, если X знаком с A_1 , A_2 знаком с A_3, \dots, A_k знаком с Y . Из условия следует, что любые два жителя соединены некоторой цепочкой. Будем считать, что замкнутых цепочек (т.е. цепочек, в которых X знаком с Y) нет. Возьмем самую длинную цепочку $X - A_1 - A_2 - \dots - A_{10} - \dots - A_k - Y$. Если $k \leq 19$, то новость, сообщенная A_{10} , через 10 дней станет известна всем жителям поселка. Если $k \geq 20$, отделим жителей X, A_1, \dots, A_{10} и всех, кто связан с ними не через A_{11} (их не меньше 11). Оставшаяся группа жителей по-прежнему удовлетворяет условию задачи. Повторяя уже описанную процедуру 89 раз (и на каждом шагу выделяя своего A_{10}), мы либо на каком-то шагу исчерпаем всех жителей, либо останется не более $1000 - 89 \cdot 11 = 21$, из которых выберем еще одного, как описано выше. Если же в поселке есть замкнутые цепочки, то их можно разорвать, сохраняя условия задачи.

311. Имеем $f(\pi n) = (-1)^n a + (-1)^n b$; $f(\pi/3) = a/2 - b$; $f(2\pi/3) = -a/2 + b$. Поэтому $|a + b| \leq 1$, $|a - 2b| \leq 2$.

312. Параллелограмм $KL'MN'$, где L' и N' — середины сторон BC и AD , либо совпадает с $KLMN$, либо не совпадает. В

последнем случае четырехугольник $ABCD$ – трапеция ($BC \parallel AD$),

313. Ответ: $x_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$; $x_n = n$ при $n \in \mathbb{Z}$.

314. Назовем строку таблицы $m \times n$ белой, если в ней преобладают белые клетки, и черной – в противном случае. Пусть p и q – количества белых и черных строк, r и s – количества белых и черных столбцов ($p + q = m$, $r + s = n$). Можно считать, что $p \leq q$. Пусть в каждом ряду (строке и столбце) менее четверти клеток «чужого» цвета. Тогда $ps + qr$ не больше общего числа клеток «чужого» цвета во всех строках и столбцах, т.е. меньше $mn/4 + mn/4 = mn/2$, поэтому $r \leq s$, а общее число белых клеток меньше

$$pr + \frac{qn}{4} + \frac{sm}{4} = \frac{mn}{2} + pr - \frac{np}{4} - \frac{mr}{4} = \\ = \frac{mn}{2} - \frac{p}{2} \left(\frac{n}{2} - r \right) - \frac{r}{2} \left(\frac{m}{2} - p \right) \leq \frac{mn}{2}.$$

315. Из условия следует, что $\overline{AE} = \overline{MB} = \overline{XK} = \overline{PC} = \overline{HA} = \overline{BT}$.

316. Ответ: $x = 5$, $y = 6$. Если $x = d + y$, где $d \geq 1$, то $(3d - 1)y^2 + (3d^2 - d)y + d^3 = 61$, откуда $d \leq 3$.

317. Для любой команды найдутся 9 команд, с которыми она еще не играла, а среди этих девяти – две, не игравшие между собой.

318. Пусть A_2, B_2, C_2 – точки на сторонах BC , CA и AB такие, что $AC_2/C_2B = BA_1/A_1C = CB_2/B_2A = 3$. Периметр шестиугольника $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ равен $\frac{3}{4}P$ и больше периметра треугольника $A_1B_1C_1$. Далее следует записать неравенство треугольника для треугольников $A_2C_1B_1$, $C_1B_2A_1$ и $A_1B_1C_2$.

319. Следует воспользоваться неравенствами $x > y > 0$ и $0 < x^3 - y^3 < x^3 + y^3$.

320. Пусть A и B – концы построенной ломаной. Спроектируем ломаную на прямую AB . Относительная погрешность каждого из звеньев равна p , поэтому сумма абсолютных погрешностей всех звеньев не больше $4p$, следовательно, и $d \leq 4p$.

321. а) Нельзя (сумма всех поставленных чисел остается нечетной).

б) Можно.

в) Нельзя. Для доказательства утверждений пунктов а) и в) полезно рассмотреть 2 тетраэдра, образованных вершинами

куба, никакие две из которых не принадлежат одному ребру. Производимые операции увеличивают на 1 сумму чисел, стоящих в вершинах каждого из этих тетраэдров.

322. Ответ: например, 9440. Пусть $m = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot k$. Подбирая k так, чтобы $m - 1$ делилось на 11, а $m + 1$ — на 13, получим, что число $n = m - 10$ удовлетворяет условию задачи (П2).

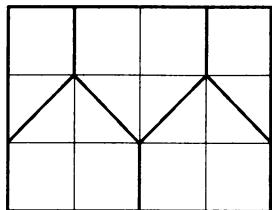


Рис. 23

323. Ответ: в последней стопке карточки будут лежать в неубывающем порядке номеров.

324. Из любых шести данных точек по крайней мере две окажутся в одной из фигур, показанных на рисунке 23.

325. а) Ответ: 3 при $x = y = 1$.

Из неравенства о среднем арифметическом следует, что $1 + x^2y^4 + x^4y^2 \geq 3x^2y^2$.

б) Пусть $P(x, y) = g_1^2(x, y) + g_2^2(x, y) + \dots + g_n^2(x, y)$, где $g_i(x, y)$, $i = 1, 2, m$ — многочлены. Так как $P(x, 0) = P(0, y) = 4$, многочлены g_i не могут содержать одночленов вида ax^k и by^i . Поэтому коэффициент при x^2y^2 должен быть положительным.

326. Ответ: одна точка O — центр треугольника ABC .

327. Ответ: $r_1 r_2$.

328. Ответ: три числа. По индукции доказываем, что $a_{n-1} < b_n < a_n$ при $n \geq 4$.

329. а) Из всех чисел вида $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n}$, делящихся на $2^m - 1$, выберем числа с наименьшим n , а из полученных чисел выберем число с наименьшим $k_1 + k_2 + \dots + k_n$. Все числа в наборе (k_1, k_2, \dots, k_n) различны. Если $n < m$, то $k_i \leq m - 1$ и $2^{k_1} + 2^{k_2} + \dots + 2^{k_n} < 2^m - 1$. Противоречие.

б) Не существует. Пусть $P = a_1 10^r + \dots + a_r$ — наименьшее из чисел, делящихся на $M = \underbrace{11\dots1}_m$ и имеющих сумму цифр,

меньшую m . Тогда $r \geq m$ и число $P_1 = P - (10^r - 10^{r-m})$, делящееся на M , меньше P и имеет сумму цифр, не превосходящую сумму цифр числа P .

330. Среди восьми чисел найдутся три, не превосходящие $1/6$, причем два из них будут стоять на концах диагонали одной из граней. Эту грань и следует выбрать первому игроку.

331. Ответ: в субботу.

332. Ответ: $MA/MB = k^2$. Пусть O — центр параллелограмма. Треугольники AOM и MOB подобны.

333. Предположим, что утверждение неверно. Погасим концы дуг черной краской. Разделим всю окружность на дуги длины 1 и новые точки деления покрасим в красный цвет. Возьмем теперь какую-нибудь дугу AC длины 2 с черными концами и красной серединой B' . Диаметрально противоположная ей точка B черная. Пусть на дуге AB длины $3k - 1$ n_1 дуг длины 1, n_2 дуг длины 2 и n_3 дуг длины 3. На дуге BC будет n_1 дуг длины 3 (точки, диаметрально противоположные концам дуги единичной длины, красные!). Поэтому $n_3 = k - n_1$, что противоречит равенству $3k - 1 = n_1 + 2n_2 + 3n_3$.

334. Пусть AM , BM , CM и DM – отрезки длины 1, отложенные на лучах, соединяющих точку M с вершинами тетраэдра. Прямая DM пересекает треугольник ABC в некоторой точке P . Если косинусы углов AMD , BMD и CMD больше $-1/3$, то эти углы меньше $\varphi = \arccos(-1/3)$, а углы AMB , BMP и CMP больше $\pi - \varphi$. Можно считать, что $\angle APB \geq 120^\circ$. Тогда, записав теорему косинусов для треугольников APB и AMB , получим, что $\cos \angle AMB < -1/3$.

335. Ответ: $b < a < c$.

336. Пусть O – точка, для которой $\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_{2n+1}} = 0$. Выберем k так, чтобы $2^k - 1$ делилось на $2n + 1$. Тогда ломаная M_k будет гомотетична M относительно O с коэффициентом 2^{-k} .

337. Ответ: 100. Следует рассмотреть число a – наибольшее из первых 99 чисел, и число b – наименьшее из последние 1882 чисел и убедиться, что $a < 100 < b$.

338. Ответ: Знайка прав. Общая длина проекций островов на берег меньше 4 м. Поэтому от пристани до ближайшего просвета между островами меньше 2 м.

339. Последовательно проводим: 1) две параллельные прямые, каждая из которых пересекает параболу в двух точках; 2) прямую через середины получающихся отрезков; 3) перпендикуляр к этой прямой, пересекающий параболу в двух точках A и B ; 4) серединный перпендикуляр к отрезку AB – это ось Oy . Ось Ox перпендикулярна Oy в точке пересечения с параболой. Единица масштаба – абсцисса пересечения прямой $y = x$ с параболой.

340. 6) Пусть M_k и m_k – наибольшее и наименьшее из чисел k -го столбца. Тогда в столбце встретится любое $m_k \leq x \leq M_k$. Поэтому либо существует x , для которого $m_k \leq x \leq M_k$ при всех $k = 1, 2, \dots, n$, либо $M_k \geq m_k > M_p \geq m_p$ для некоторых k и p , но тогда в каждой строке встретится любое число y , для которого $M_p \leq y \leq m_k$.

$$341. 2^{\sqrt[3]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}}{2}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

342. Ответ: 43 числа: 2, 3, ..., 44. Если вычеркнуть меньше 43-х чисел, то хотя бы одна тройка $(k, 89 - k, k(89 - k))$, где $2 \leq k \leq 43$, состоит из невычеркнутых чисел.

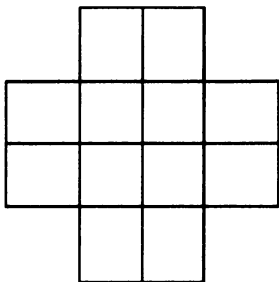


Рис. 24

343. Наименьшее из чисел, стоящих в клетках фигуры, показанной на рисунке 24, удовлетворяет условию.

344. Можно считать, что $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geq 0$. Пусть множество M_{ik} ($i, k = 0, 1, i \neq k$) состоит из всех чисел a_l , для которых $l \equiv i \pmod{3}$, а также положительных чисел a_m , для которых $m \equiv k \pmod{3}$. Говорят одно из множеств M_{ik} .

345. Столбец, не содержащий отмеченных клеток, переставляем с крайним правым столбцом, а последнюю строку полученной таблицы – с какой-нибудь строкой, содержащей отмеченные клетки. Задача свелась к таблице $(n-1) \times (n-1)$.

346. Пусть a_0, a_1, \dots, a_n – числа $0, 1, 2 \dots n$, занумерованные так, что $|a| \leq |a - a_0| \leq |a - a_1| \leq \dots \leq |a - a_n|$. При всех $1 \leq k \leq n$ верны неравенства $|a - a_k| \geq \frac{k}{2}$, перемножая которые получим

$$|a||a-1|\dots|a-n| = |a-a_0||a-a_1|\dots|a-a_n| \geq \langle a \rangle \frac{n!}{2^n}.$$

347. а) Нет: при $x = 1, y = 2, z = 1$ левая часть равна 0.

б) Да. Пусть $u = x - y + 1, v = y - z - 1, w = z - x + 1$. В равенстве $(u + v + w)^7 = 1$ раскроем скобки. После группировки получим $u^3P + v^3Q + w^3R = 1$.

348. Пусть грань KLM тетраэдра $KLMN$ имеет наибольший периметр. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 – проекции точек A, B, C, D на плоскость KLM и пусть Γ – ломаная, ограничивающая проекцию тетраэдра $KLMN$ на эту плоскость. Пусть P_{RSTQ} – сумма длин всех шести отрезков, попарно соединяющих точки R, S, T и Q .

Тогда 1) $P_{KLMN} \leq 2P_{KLM}$; 2) $P_{KLM} \leq P_{\Gamma}$; 3) $P_{\Gamma} \leq \frac{2}{3}P_{A_1B_1C_1D_1}$; 4) $P_{A_1B_1C_1D_1} \leq P_{ABCD}$.

349. б) Никакие две ломаные не должны иметь общих отрезков. Поэтому 12 узлов решетки, расположенных на границе

квадрата и отличных от его вершин, должны быть концами ломаных, а у 5 ломаных всего 10 концов.

350. Ответ: а) нет; б) да.

Здесь полезно рассуждать «с конца»: тройка (17, 1967, 1983) могла быть получена только из тройки (5, 3, 3), а тройка (5, 3, 3) получается из тройки (3, 3, 3) и не получается из тройки (2, 2, 2).

351. Пусть O – точка внутри треугольника XYZ . Соединим ее с центрами O_1, O_2, O_3 данных кругов и точками X, Y, Z . Один из шести образовавшихся углов (острых!) не меньше 60° (например, угол O_1XA). Тогда

$$AO < OX \sin 60^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} OX.$$

352. Пусть $n^2 < a < b < c < d < (n+1)^2$, $ad = bc$. Тогда $(a+d)^2 - (d-a)^2 < (b+c)^2$ и $a + d > b + c$, откуда $(d-a)^2 > (a+d+b+c)(a+d-b-c) > 4n^2$, но $d - a < 2n$, Противоречие.

353. Ответ: $(0; 0)$, $(2 + \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2})$, $(2 - \sqrt{2}; 2 - \sqrt{2})$. Вычитая из первого уравнения второе, получим $f(x) = f(y)$, где функция $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$ возрастает ($f'(x) > 0$).

354. Если $k \geq a \underbrace{44 \dots 45}_{n-2}$, ($a \geq 1$ – первая цифра), то

$$\tilde{k} = (a+1) \cdot 10^{n-1} \text{ и } \tilde{k}/k \leq \frac{(a+1)10^{n-1}}{a \underbrace{44 \dots 45}_{n-2}} < \frac{a+1}{a + \frac{4}{9}} \leq \frac{18}{13}.$$

Если $k \leq \underbrace{a 44 \dots 4}_{n-1}$, то $\tilde{k} = a10^{n-1}$ и $\tilde{k}/k \leq 1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{355.} \quad S_{DEF} &= \frac{1}{2}(S_{BEF} + S_{AEF}) < \frac{1}{2}(S_{BEF} + S_{ADF}) = \\ &= \frac{1}{2}S_{ABFE} = \frac{1}{2}(S_{ABF} + S_{AFE}) \leq \frac{1}{2}(S_{ABF} + S_{ABE}) = S_{BDF} + S_{ADE}. \end{aligned}$$

356. Ответ: а) нет; б) нет.

а) Последняя цифра числа α_{2k+1} равна k -й цифре после запятой в десятичном разложении числа $\sqrt{10}$.

б) Пусть $\gamma_n = 0$, если β_n – четно и $\gamma_n = 1$, если β_n – нечетно. Так как γ_{2n+1} совпадает с n -м знаком после запятой двоичного разложения числа $\sqrt{2}$, последовательность γ_{2n+1} непериодична.

357. Из условия следует, что $\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \beta) = \sin \beta (\cos \alpha - \sin \beta)$. Если $\sin \alpha > \cos \beta$ и $\cos \alpha > \sin \beta$, то

$\sin^2 \beta + \cos^2 \beta < 1$. Неравенства $\sin \alpha < \cos \beta$, $\cos \alpha < \sin \beta$ также невозможны. Поэтому $\sin \alpha = \cos \beta$, $\cos \alpha = \sin \beta$.

358. Пусть α и β – данные плоскости и l – линия их пересечения. Достаточно повернуть плоскость α вокруг прямой l до совпадения с плоскостью β (точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 поворачиваются вместе с плоскостью α).

359. Ответ: 5. Если уравнение $f_n(x) = x^2 + p_n x + q_n = 0$ не последнее, то $p_n^2 > 4q_n$, $q_n > p_n$, $p_n q_n > -(p_n + q_n)$, если $n \geq 3$ и $p_n q_n > 0$. Если уравнение $f_5(x) = 0$ не последнее, то либо $p_4 < 0 < q_4$, либо $0 < p_4 < q_4$ и при этом $p_3 < 0 < q_3$. Оба случая

невозможны. Пример для $n = 5$: $f_5(x) = x^2 - \frac{1}{2}x + 4$, $f_4(x) = x^2 - \frac{7}{2}x - 2$, $f_3(x) = x^2 + \frac{11}{2}x + 7$, $f_2(x) = x^2 - \frac{25}{2}x + \frac{77}{2}$, $f_1(x) = x^2 - 26x - \frac{1925}{4}$.

360. Если a^n делится на b^n , то a делится на b .

361. Ответ: нет. Всего существует 128 двухбуквенных слов длины 7. Из них «невозможными» будут $3 \cdot 8 + 10 \cdot 4 + 30 \cdot 2 = 124$ слова.

362. Ответ: а) можно; б) можно.

а) Возьмем два бесконечных листа клетчатой бумаги и на диагоналях, удаленных друг от друга на 4 клетки, на первом листе расставим единицы, а в остальных клетках – нули, на втором единицы расставляются в диагоналях, отстоящих на 6 клеток, после чего складываем числа, стоящие в соответствующих друг другу клетках.

б) На тех же диагоналях расставляем через одну клетку 0 и 1 и вычитаем числа в соответствующих клетках,

363. Ответ: $\sqrt{5} + 1$.

364. Если a – общее количество пар и m – количество пар, состоящих из мальчиков, то $2a = 8m$.

365. Ответ: $3 + 2\sqrt{2}$. Если S_1, S_2, S_3, S_4 – площади прямоугольников, занумерованные по часовой стрелке, то $S_1 S_3 = S_2 S_4 \geq 2$, а $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \geq 3 + 2\sqrt{2}$.

366. Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – единичные векторы, сонаправленные с векторами \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} ; $\angle BOC = \alpha$, $\angle COA = \beta$, $\angle AOB = \gamma$. Достаточно доказать, что $\vec{e}_1 \sin \alpha + \vec{e}_2 \sin \beta + \vec{e}_3 \sin \gamma = \vec{0}$. Для этого следует рассмотреть треугольник PQR , стороны которого соответственно параллельны OA , OB и OC , и воспользоваться равенством $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR} + \overrightarrow{QR} = \vec{0}$.

367. Индукция по m : при $m = 1$ утверждение правильно. Пусть оно верно для $m = k - 1$ ($k \geq 2$). Рассмотрим любое множество A , состоящее из $2k + 1$ чисел, не больших $2k - 1$ по модулю. Если среди них найдутся $2k - 1$ чисел, не превосходящих по модулю $2k - 3$, то все ясно. В противном случае можно считать, что в A либо содержатся числа $2k - 1$, $2k - 2$ и $-2k + 1$, либо $2k - 1$, $2k - 2$ и $-2k - 2$. В первом случае следует рассмотреть пары $(1; 2k - 2)$, $(2; 2k - 3)$, ..., $(k - 1, k)$ и $(0, -2k + 1)$, $(-1, -2k + 2)$, ..., $(-k + 1, -k)$. Хотя бы одна пара состоит из чисел, входящих в A . Во втором случае аналогично рассматриваются пары $(1, 2k - 3)$, ..., $(k - 2, k)$ и $(0, -2k + 1)$, $(-1, -2k)$, ..., $(-k + 1, -k)$.

368. Ответ: равенство возможно только для равносторонних треугольников ABC и DEF с соответственно перпендикулярными сторонами. Из неравенства $d_0 < \frac{2}{\sqrt{3}} \min(d_1, d_2, d_3)$ следует, что все углы треугольника ABC меньше 60° .

369. Если на прямой даны непересекающиеся отрезки Δ_1 и Δ_2 с длинами α и β , то множество длин отрезков с концами, принадлежащими Δ_1 и Δ_2 , заполняет некоторый отрезок длины $\alpha + \beta$. Поэтому если $\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_k$ — длины данных отрезков, то

$$\delta_1 + (\delta_1 + \delta_2) + (\delta_1 + \delta_3) + \dots + (\delta_1 + \delta_k) + \dots + (\delta_{k-1} + \delta_k) + \delta_k =$$

$$= k(\delta_1 + \delta_2 + \dots + \delta_k) \geq 1.$$

370. Ясно, что $v_1 = 10$ и $v_n \leq v_{n+1}$. Если $v_n = v_{n+1}$ при каком-нибудь n , то дробь периодична. Если $v_{n+2} > v_n$ при всех n , то $v_n \geq v_{n-1} + 1 \geq v_{n-2} + 2 \geq \dots \geq v_1 + n - 1 = n + 9 > n + 8$.

371. а) Если n не делится на 4, то среди сомножителей лишь одно четное число и потому их сумма не равна 0.

б) Ответ: при $n = 4k$, $n = 2 \cdot (-2k) \cdot 1^{3k-2} \cdot (-1)^k$, если k четно, и $n = (-2)(-2k) \cdot 1^{3k} \cdot (-1)^{k-2}$, если k нечетно.

$$\mathbf{372.} \quad \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \text{и} \quad a+b+\frac{1}{2} \geq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

373. Вектор \overline{AB} получается из \overline{AC} поворотом на 60° ($\overline{AB} = -\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B}$; $\overline{AC} = -\overline{A_1C_1} + \overline{A_2C}$).

374. Ответ: при m и n , имеющих одинаковую четность. Если m и n нечетны, то нужно склеить полоску $1 \times n$, а из m таких полосок получить прямоугольник $m \times n$. При четных m и n сначала склеиваются прямоугольники $(m-1) \times (n-1)$, $1 \times (n-1)$, $(m-1) \times 1$ и 1×1 . Если числа m и n имеют разную четность, то

из предположения о возможности склеить прямоугольник требуемым образом следует, что общее количество плиточек будет нечетно.

375. $x^{\sin^2 \alpha} \cdot y^{\cos^2 \alpha} \leq \max(x, y) < x + y$.

376. Ответ: неверно. Партнеру достаточно покрасить в зеленый цвет любые три попарно скрещивающихся ребра, а он это всегда сможет сделать.

377. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — данные числа и

$$S_n = \frac{a_n + a_2}{a_1} + \frac{a_1 + a_2}{a_2} + \dots + \frac{a_{n-1} + a_1}{a_n},$$

а) $S_n = \left(\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_1}{a_2} \right) + \dots + \left(\frac{a_1}{a_n} + \frac{a_n}{a_1} \right) \geq 2n$.

б) Неравенство $S_n \leq 3n$ доказывается по индукции. Для этого следует сначала рассмотреть случай $n = 3$ и заметить, что наибольшее из чисел a_1, a_2, \dots, a_n равно сумме своих соседей.

378. Прямые A_1A_2 , B_1B_2 и C_1C_2 являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.

379. Ответ: $m = n = 0$. Если $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$, то $(5 - 3\sqrt{2})^m = (3 - 5\sqrt{2})^n$, но это невозможно, так как $0 < 5 - 3\sqrt{2} < 1$, $5\sqrt{2} - 3 > 1$.

380. Если в первой строке стоят $a_1 < a_2 < \dots < a_m < a_{m+1} < \dots < a_n$, а вторая строка состоит из чисел $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots, a_{k_m}, a_{k_{m+1}}, \dots, a_{k_n}$, то в третьей строке стоят числа $a_1 + a_{k_1}, a_2 + a_{k_2}, \dots, a_m + a_{k_m}$. Пусть $a_1 \neq a_{k_1}$. Тогда $a_1 = a_{k_m}$ при некотором $m \geq 2$. По условию $a_1 + a_{k_1} < a_m + a_{k_m}$, $a_2 + a_{k_2} < a_m + a_2, \dots, a_{m-1} + a_{k_{m-1}} < a_m + a_{k_m}$, откуда $a_{k_2} < a_m, a_{k_3} < a_m, \dots, a_{k_{m-1}} < a_m$. Кроме того, $a_1 < a_m, a_{k_1} < a_m$. Мы нашли m различных чисел, меньших a_m . Противоречие.

381. Здесь удобно воспользоваться леммой: если хорда AB некоторой окружности неподвижна, а хорда A_1B_1 скользит

концами по этой окружности, то точка пересечения прямых AA_1 и BB_1 описывает окружность, проходящую через точки A и B .

382. Ответ: $24\sqrt{3}$. Выразите D через площадь треугольника XYZ (рис.25).

383. Ответ: верно. Так как $f(-1) = 11$, а $g(-1) = -9$, в какой-то момент корнем полученного трехчлена будет -1 .

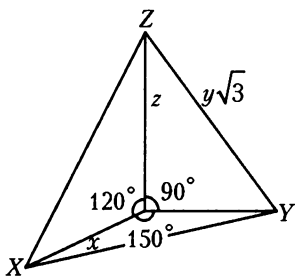


Рис. 25

384. Ответ: $\pi r^2 + 2pr - (pr^2/2R)$.

385. Пусть k – масса самой тяжелой гири, а m – число гирь массы 1. Тогда $m \geq k$. В каждый момент массы гирь на двух чашках отличаются не более чем на k . Поэтому, после того как будут положены на весы все гири массы большей 1, чашки можно уравновесить добавлением гирь единичной массы.

386. В записи абсолютно простого числа могут участвовать только цифры 1, 3, 7, 9. Для любого M число $M + 1379$, $M + 3179$, $M + 9137$, $M + 7913$, $M + 1397$, $M + 3197$ или $M + 7139$ делится на 7. Противоречие.

387. Ответ: $x = 9$, $y = 0$; $x = 4$; $y = 2$.

388. Если точка M лежит внутри или на стороне треугольника PQR ($M \neq P$), то $MQ + MR < PQ + PR$. Исходное неравенство достаточно доказать для случая $AB = CD$.

389. Ответ: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \left(|x_{n+7}| \leq \frac{1}{4} \left(\frac{5}{6} \right)^n \text{ при } n \geq 1 \right)$.

390. Рассмотрим шахматную доску 1985×1986 , содержащую доску 1983×1984 и имеющую с ней общий центр. Черные клетки, соседние с белыми клетками, в которых стоят -1 , лежат на замкнутой траектории шахматного слона,двигающегося по большой доске, проходящего диагонали не более одного раза и меняющего направление движения только у края доски. На доске 1985×1986 такой траектории нет.

391. Уже на 4 шагу во всех клетках окажутся единицы.

392. Ответ: $\ln 1,01 > 2/201$. Функция $y = \ln(1+x) - \frac{2x}{x+2}$ возрастает при $x > 0$.

393. Ответ: $r = r_1 r_2 r_3 / (r_1 r_2 - r_2 r_3 + r_1 r_3)$.

394. Такое сечение – параллелограмм или центрально симметричный шестиугольник, периметр которого не меньше $4a$, в чем можно убедиться, рассмотрев развертку куба.

395. Пусть A_1 , B_1 , C_1 – середины сторон данного треугольника ABC , а O – центр его описанной окружности. Отрезки OA_1 , OB_1 и OC_1 разбивают шестиугольник на параллелограммы. Поэтому площадь шестиугольника равна удвоенной площади треугольника $A_1 B_1 C_1$.

396. Ответ: существует. Пусть n – k -значное число, записываемое с помощью m единиц и какого-то количества нулей и такое, что $S(n^2) = m^2$. Тогда для числа $n_1 = 10^{k+1}n + 1$, где k – число знаков в записи n , $S(n_1) = m + 1$, $S(n_1^2) = (m + 1)^2$.

397. Ответ: 16. Все дамки должны находиться на доске 6×6 с центром, совпадающим с центром доски 8×8 .

398. Ответ: n цветов. Пусть A, B и C – три идущие подряд вершины. Любые два из n отрезков: BA, BC, AC и $n - 3$ диагонали, выходящие из B , имеют общую точку. Далее следует покрасить в один из n цветов все стороны и диагонали, образующие со стороной AB соответственно один и тот же угол $\frac{k \cdot 180^\circ}{n}$ при $k = 0, 1, 2, \dots, n - 1$.

399. Пусть $S_l(O) = O_1$. С помощью симметрии S_l и поворотов с центром O точку O можно перевести в любую точку окружности ω с центром O_1 и радиусом $r = OO_1$. Окружность ω можно перевести в любую из окружностей, показанных на рисунке 26. При вращении вокруг точки O цепочка окружностей заметает всю плоскость.

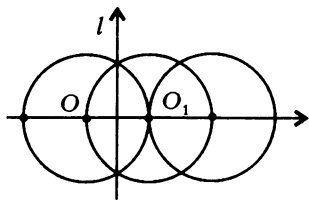


Рис. 26

440. Ответ: в двух точках. Если есть три точки, удовлетворяющие условию, то какие-то две из них лежат по одну сторону от точки $x = -b/2a$. Осталось оценить модуль разности $y(x_1) - y(x_2)$.

401. Ответ: $d = 20$ (рис. 27). Если $d < 20$, то $20 > d = 2(l + h) + a + l + h + k \geq 2(l + h) + 10$, откуда $l + h \leq 4$. Можно считать при этом, что $l < h$. Отсюда либо $l = 1, h = 3$, либо $l = 1, h = 2$. Оба эти случая приводят к противоречию.

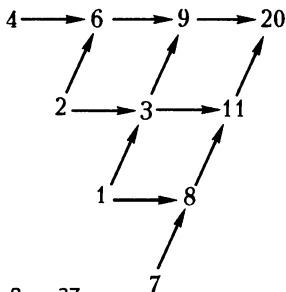


Рис. 27

402. Пусть $S_k = \frac{a_1}{a_2} + \dots + \frac{a_k}{a_{k+1}}$.

При достаточно больших k ($m < k$) справедливы неравенства $S_k < k - \frac{1}{2}$,

$$S_k - S_m < k - m - \frac{1}{2}.$$

403. Ответ: $x = \pi t, y = \pi n$ ($m, n \in \mathbb{Z}$). Из условия следует, что

$$|\sin x| + |\sin y| \leq |\sin x| \cdot |\sin y|.$$

404. Пусть O и X – любые точки плоскости и $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$. По условию $\vec{e} + \vec{e}_1 = 2\vec{a}$, $\vec{a} + \vec{a}_1 = 2\vec{b}$, $\vec{b} + \vec{b}_1 = 2\vec{c}$, $\vec{c} + \vec{c}_1 = 2\vec{d}$, $\vec{d} + \vec{d}_1 = 2\vec{e}$. Решая эту систему, находим векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$.

405. Если $T = 2^r \cdot q$ (q – нечетно) – период данной последовательности, то при $q = 4m + 3$ и $k \geq p + 2$: $1 = a_{2^k} = a_{2^k + T} = 0$.

Противоречие. При $q = 4m + 1$: $1 = a_{2^k} = a_{2^k+3T} = 0$, что также приводит к противоречию.

406. Если все данные прямые попарно параллельны, утверждение очевидно. Пусть m_2, m_3, \dots, m_k – количества окрашенных областей, имеющих k сторон. Тогда $m_2 \leq n$. Кроме того, каждая прямая делится остальными не более чем на n частей, так что общее количество частей прямых не больше n^2 . Поэтому $2m_2 + 3m_3 + \dots \leq n^2$. Наконец,

$$m_2 + m_3 + \dots + m_k + \dots \leq \frac{m_2}{3} + \frac{2m_2 + \dots + k m_k}{3} \leq \frac{n(n+1)}{3}.$$

407. Пусть A и B – цвета дна и крышки коробки. Какие-то две противоположные грани куба покрашены в другие цвета C и D . Вложим куб в коробку так, чтобы грань цвета D оказалась на дне коробки, а грань куба цвета E прилегла к грани шестого цвета F коробки.

408. Треугольники A_2MN , A_2A_3N и NA_3O равнобедренные.

409. Если четверка (a_n, b_n, c_n, d_n) получена из данной на n -м шаге ($n \geq 1$), то $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$ и $a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2 \geq 2(a_{n-1}^2 + b_{n-1}^2 + c_{n-1}^2 + d_{n-1}^2)$.

410. Каждое слагаемое $|a_k - b_k|$ ($k = 1, 2, \dots, n$) равно разности числа, большего n , и числа, не превосходящего n . Поэтому

$$|a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n| = (n+1) + (n+2) + \dots + 2n - (1+2+\dots+n) = n^2.$$

411. Ответ: число окрашенных кубиков может принимать одно из пяти значений: 60, 72, 84, 90, 120. Пусть параллелепипед имеет размеры $m \times n \times k$ ($k \leq n \leq m$). Всего неокрашенных кубиков будет $(m-1)(n-1)(k-1)$. По условию $mnk = 2(m-1)(n-1)(k-1)$, откуда следует, что $2 < k < 5$. Осталось решить в целых числах уравнение относительно m и n при $k = 3$ и $k = 4$.

412. Точка K , симметричная точке C относительно P , лежит на окружности, проходящей через A и $AKMD$ – параллелограмм, так что треугольники AKM и AMD равны.

413. Пусть числа a и b ($a < b$) стоят в соседних узлах A и B сетки. Проведем маленькую стрелку, направленную влево от AB , если двигаться от A к B (рис.28).

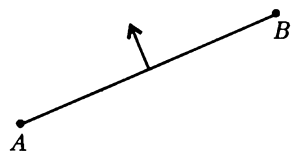


Рис. 28

Если числа, записанные в вершинах треугольника, возрастают при обходе по часовой стрелке, то внутри него находятся 2 стрелки, если против часовой стрелки – то одна. Пусть n – количество треугольников первого типа. Общее количество N стрелок внутри шестиугольника равно $2n + 24 - n = n + 24$. Осталось заметить, что $N \geq 31$ (есть 30 стрелок, идущих от внутренних отрезков, и хотя бы одна – от граничных).

414. Ответ: 3.

$\sqrt{x+1} - 1 = x/\sqrt{x+1} + 1$, поэтому при $x \geq -1$ дробь равна $\sqrt{x+1} - 1$.

415. Ответ: $\frac{5\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{6}$.

416. Прямоугольник удовлетворяет условиям, если для его сторон x и y ($x \leq y$) выполнены неравенства $xy > m$ и $x(y-1) < m$. При любом $m > 12$ эта система имеет решения: $x = k - 1$, $y = k + 2$ при $m = k^2$; $x = k$, $y = k + 1$ при $k^2 < m < k(k+1)$; $x = k - 1$, $y = k + 3$ при $m = k(k+1)$ и $x = y = k + 1$ при $k(k+1) < m < (k+1)^2$.

417. Ответ: $(\sqrt{3} - \sqrt{2})$ 2. Рассматриваемые окружности лежат на двух концентрических сферах: описанной около куба и касающейся всех его ребер. Наименьшее расстояние равно разности радиусов этих сфер.

418. Пусть x_1 и x_2 – корни уравнения. Тогда

$$a^2 + b^2 = (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1).$$

419. При параллельном переносе синего квадрата вдоль одной из его сторон сумма синих сторон восьмиугольника не меняется, а когда центры синего и красного квадратов совпадают, сумма синих сторон равна сумме красных.

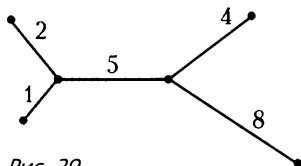


Рис. 29

420. Ответ: когда BM – высота треугольника,

421. а) Можно (рис.29). б) Нельзя.

Если требуемая сеть дорог существует, то одно из чисел n или $n - 2$ является квадратом целого числа.

Выберем какой-нибудь город A и назовем его «хорошим». Любой город называется «хорошим», если длина пути A и B – четное число, и «плохим» – если нечетное. Пусть x – число «хороших» городов, y – число «плохих» городов ($x + y = n$).

другой – плохой. Значит, среди чисел $1, 2, \dots, \frac{n(n-1)}{2}$ имеется xy нечетных чисел. Если n нечетно, то $n = n^2 - 4xy = (x - y)^2$, если же четно, то $n = (x - y)^2 + 2$.

422. Равенство $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = BD^2 \sqrt{2}$ невозможно (числа $\overline{AC} \cdot \overline{BD}$ и BD^2 — целые).

423. Пусть $a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1}$, где $a_1 \geq 3$ – нечетно, а остальные a_i ($i=2, \dots, n-1$) – четны. Пусть $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{n-1}^2 = 2k+1$ и $a_n = k$. Тогда $a_1^2 + a^2 + \dots + a_n^2 = (k+1)^2$. Рассмотрим также числа $b_1 < b_2 < \dots < b_{m-1}$, где $b_1 > 2a_n$ нечетно, а b_2, \dots, b_{m-1} – четные, причем $b_{i+1} > b_i a_n$ и $b_m = S$, где

$$2S + 1 = b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_{m-1}^2.$$

Требуемая таблица получается расстановкой в пересечении i -й строки и j -го столбца чисел $a_i^2 b_j^2$.

424. а) Пусть O_1 и O_2 – центры окружностей и точка O_3 такова, что $AO_1O_2O_3$ – параллелограмм. Тогда O_3 – центр окружности, описанной около треугольника ABC .

б) **Ответ:** все точки окружности с центром O_2 второй окружности и радиусом, равным радиусу первой окружности, кроме точек M^* и N^* , получающихся из M и N параллельным переносом, переводящим O_1 в O_2 .

425. Занумеруем узлы сетки числами 0, 1, 2 так, чтобы: а) в вершинах любого маленького треугольника стояли все три числа, б) в вершинах шестиугольника стояли цифры 0 и 1 (рис.30). Сумма всех чисел, стоящих в узлах сетки, при делении на 3 дает в остатке 2. Пусть P , Q , R – любой правильный треугольник с вершинами в узлах. Если в вершинах P и Q стоят одинаковые числа, то это же число стоит и в вершине R . Если в вершинах P и Q стоят разные числа, то в вершине R стоит третье из чисел. В любом случае сумма чисел, стоящих в точках P , Q и R , делится на 3. И, следовательно, в любой момент сумма чисел в еще непокрашенных узлах при делении на 3 дает в остатке 2.

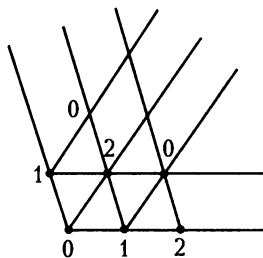


Рис. 30

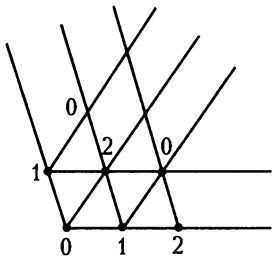


Рис. 30

426. Ответ: 1 и 9. Если число $n = m^2$ имеет $m > 1$ делителей,

то m нечетно ($m = 2k + 1$), а n имеет ровно k делителей, меньших m , и потому делится на $2k - 1$.

427. Можно считать, что $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Неравенство теперь следует из оценок:

$$\frac{2}{a_1 + a_2} \leq \frac{1}{a_1},$$

$$\frac{2k-1}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k-1}} \leq \frac{2k-1}{a_k + \dots + a_{2k-1}} \leq \frac{2k-1}{k \cdot a_{k-1}} < \frac{2}{a_{k-1}}$$

при $2 \leq k \leq \frac{n+1}{2}$,

$$\frac{2k}{a_1 + a_2 + \dots + a_{2k}} \leq \frac{2k}{a_{k+1} + \dots + a_{2k}} \leq \frac{2}{a_k}.$$

428. Ответ: AB , AC , биссектриса угла BAC , касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC , касательная в точке A к окружности, описанной около треугольника AB_1C , где точка B_1 симметрична B относительно A .

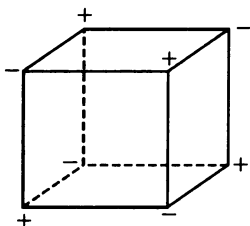


Рис. 31

429. Требуемая расстановка получается из расстановки одних нулей с помощью повторения следующих двух операций: а) перестановка местами двух слоев единичных кубиков, параллельных какой-либо грани куба; б) прибавление к числам, стоящим в вершинах исходного куба и помеченных знаком «+», и одновременно вычитание из чисел, стоящих у вершин, помеченных знаком «-» (см. рис.31), одного и того же числа.

430. Ответ: $x = 3, y = 2, z = 1, n \geq 2$; $x = 6, y = 8, z = 4, n \geq 2$; $x = 8, y = 3, z = 7, n = 2$.

431. Пусть O и O' – данные точки, причем для определенности точка O' лежит внутри или на сторонах треугольника OA_1A_2 . Тогда $O'A_1 + O'A_2 < OA_1 + OA_2$ и $O'A_i - OA_i \leq 10$ см ($i = 3, 4, \dots, 12$).

432. Ответ: можно. Нужно налить во все стаканы, кроме одного, по 100 г молока, а в оставшийся – 200 г.

433. Ответ: а) 1; б) 5000/4999.

а) при симметрии относительно центра прямоугольника раскраска переходит в противоположную.

б) следует рассмотреть проекции белых и черных отрезков на одну из сторон прямоугольника.

434. а) Пусть O – центр описанной около многоугольника окружности. Тогда $\overline{MA_i} = \overline{MO} + \overline{OA_i}$ и в сумме достаточно взять знак «+» у слагаемых с четными номерами, знак «-» – у остальных.

б) Пусть $\overline{MA_1}, \overline{MA_2}, \dots, \overline{MA_k}$ входят в сумму со знаком «+» и $\overline{MA_{j_1}}, \dots, \overline{MA_{j_{n-k}}}$ – со знаком «-». Если сумма равна 0, то

$$\overline{MO} = \frac{1}{n-2k} (\overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_k} - \overline{OA_{j_1}} - \dots - \overline{OA_{j_{n-k}}}),$$

а этим условием M определяется однозначно.

435. Ответ: а) 1 при $n = 3$; $(n-1)^2 - 1$ при $n \geq 4$; б) $n - 2$.

436. Достаточно доказать при всех x неравенство $|\sin x| + |\sin(x+1)| + |\sin(x+2)| > 8/5$.

437. Среди чисел от 1 до 1986 ровно два, $729 = 3^6$ и $1458 = 2 \cdot 3^6$, делятся на 3^6 . Приведя сумму всех дробей, кроме $\frac{1}{729 \cdot 1458}$, к общему знаменателю, получим дробь $\frac{a}{3^{11} \cdot b}$, где b не делится на 3.

438. Любая касательная отсекает прямоугольный треугольник с острым углом φ и площадью $1 - \frac{2}{\cos \varphi + \sin \varphi + 1} \leq (\sqrt{2} - 1)^2$. Площадь S общей части квадрата и треугольника удовлетворяет неравенству $S \geq 4 - 3(\sqrt{2} - 1)^2 > 3,4$.

439. Ответ: $\left[\frac{n}{2} \right] + 1$. Каждому значению $m = 0, 1, 2, \dots$ поставим в соответствие многочлен $P_m(x) = \sum_{i=0}^n (a_i + 2b_i)x^i$, где a_i и b_i соответственно – цифры записи чисел $n - 2m$ и m в двоичной системе. Любой из многочленов $P_m(x)$ допустим и, наоборот, каждый допустимый многочлен совпадает с некоторым из $P_m(x)$.

440. Пусть A_1, B_1, X_1, Y_1 – точки касания сферы с гранями BXY, XYA, YAB, ABX соответственно. Тогда $\Delta XY_1B = \Delta XA_1B$, $\Delta AY_1X = \Delta AB_1X$ и т. д. Используя эти равенства, можно показать, что сумма углов пространственного четырехугольника $AXBY$ равна $\angle AY_1B + \angle AX_1B = 2\angle AX_1B$ и убедиться, что $\angle AY_1B + \angle AX_1B$ не зависит от X и Y .

441. $x_1 + y_1 = x_2 + y_2 = \dots = x_{10} + y_{10} = 9$ и $x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = y_1 + y_2 + \dots + y_{10}$. Поэтому разность $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 - y_1^2 - y_2^2 - \dots - y_{10}^2 = 9(x_1 + \dots + x_{10} - y_1 - y_2 - \dots - y_{10}) = 0$.

442. Ответ: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Пусть $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_6$ – массы гирь. Ясно, что $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 4$. Если $x_k = 2^{k-1}$ при всех $k \leq m$, то $x_{m+1} = 2^m$, так как наибольшая масса, которую можно взвесить с помощью гирь $1, 2, \dots, 2^{m-1}$, равна $2^m - 1$.

443. Пусть B – точка пересечения A_1A_2 и A_3A_4 . Треугольник BA_3A_1 – равнобедренный, а $\Delta A_2BA_3 \sim \Delta A_1BA_4$.

444. Ответ: а) 12 выстрелов; б) 20 выстрелов.

а) В квадрате 7×7 можно разместить 12 неналегающих прямоугольников 1×4 ; б) в каждый прямоугольник 3×4 необходимо сделать 5 выстрелов.

445. $2(1 + 2^{1987} + \dots + n^{1987}) = (n^{1987} + 2^{1987}) + \dots$
 $\dots + (2^{1987} + n^{1987}) + 2 = (n + 2)M + 2$, где M – целое число.

446. Ответ: а) 11 фигур. В каждом квадрате 2×2 должно быть покрыто не меньше двух клеток.

б) Утверждение справедливо для квадрата 7×7 . Если оно справедливо для доски $(6n + 1) \times (6n + 1)$, то в одном из углов квадрата $(6n + 7) \times (6n + 7)$ поместим квадрат $(6n + 1) \times (6n + 1)$, закрывающий вырезанную клетку, а оставшуюся часть разрежем на прямоугольники 2×3 .

447. Пусть $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ – точки пересечения продолжений сторон с данными прямыми. Точки B_1 и B_2 лежат на окружности, описанной около равнобедренной трапеции $A_1A_2C_1C_2$.

448. Если утверждение неверно, то каждая прямая, содержащая звено одной из ломаных, пересекает звенья другой ломаной во внутренних точках и число таких точек пересечения четно.

449. Ответ: 121, 241, 361, 481, 601. Условию удовлетворяет любой набор из n чисел $a_i = i \cdot n! + 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Сумма любых k чисел этого набора делится на k .

450. Пусть F – точка пересечения диагоналей BD и CE . Точки A, F, D, E лежат на одной окружности. Точки A, B, C, F также лежат на одной окружности.

451. Ответ: $\alpha = \pm \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Если α удовлетворяет условию, то $\cos \alpha \leq -\frac{1}{4}$ (иначе $\cos 4\alpha > 0$). Точно так же при

любом натуральном n : $\cos 2^n \alpha \leq -\frac{1}{4}$, откуда $\left| \cos 2^n \alpha - \frac{1}{2} \right| \geq \frac{3}{4}$.

Но тогда

$$\left| \cos 2^n + \frac{1}{2} \right| = 2 \left| \cos 2^{n-1} \alpha - \frac{1}{2} \right| \cdot \left| \cos 2^{n-1} \alpha + \frac{1}{2} \right| \geq \frac{3}{2} \left| \cos 2^{n-1} \alpha + \frac{1}{2} \right|.$$

Итак,

$$\left| \cos \alpha + \frac{1}{2} \right| \leq \frac{2}{3} \left| \cos 2\alpha + \frac{1}{2} \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \left| \cos 2^n \alpha + \frac{1}{2} \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1}$$

при любом n . Отсюда следует, что $\cos \alpha = -1/2$.

452. $k^3 = (a + A)(b + B)(c + C) = abc + ABC + k(aB + bC + cA)$.

453. Выделим левую верхнюю угловую клетку таблицы. Затем рассмотрим области: угловой квадрат 3×3 без этой клетки, квадрат 5×5 без квадрата 3×3 , квадрат 7×7 без квадрата 5×5 и т.д. Сумма чисел, стоящих в клетках любой из построенных областей, не больше 2.

454. Пусть биссектриса угла ABC и прямая l , симметричная ей относительно центра окружности, пересекают прямую в точках L и N соответственно. Тогда $NP = KL = LM$, $PM = LN$.

455. Ответ: а); б): начинающий выигрывает.

а) Например, первым ходом он пишет число 6, после чего второй может написать одно из чисел (4, 5), (7, 8), (9, 10), которые мы объединили в пары. Первому в ответ на любой ход второго следует записывать другое число из той же пары.

б) Рассмотрим новую игру: правила те же, но среди чисел нет единицы. Если у первого есть выигрывающая стратегия в этой игре, то он сразу ее применяет. Если нет, то он сначала пишет 1 и потом применяет выигрывающую стратегию второго в новой игре.

456. Ответ: 7 дней. Пусть k — число дней, когда дежурили 9 богатырей, а l — когда дежурили 10 богатырей, причем каждый из них дежурил m раз. Тогда $9k + 10l = 33m$. При $m = 1$ решений нет, а при $m = 2$ имеем $k = 4$ и $l = 3$.

457. Если число отмеченных узлов конечно, то, отложив от правого верхнего узла все векторы, получим, что векторов (x, y) с $y > 0$ и $x > 0$ и $y = 0$ больше, чем остальных. Откладывая все векторы от левого нижнего узла, получим, что их меньше, чем остальных.

458. Рассмотрим вершины $A_{p-1}, A_p, A_1, A_2, A_3$ и A_4 данного p -угольника. Проведем диагонали $A_1A_3, A_2A_4, A_pA_2, A_{p-1}A_2$. Пусть B_1, B_2 — точки пересечения диагонали A_pA_2 с A_1A_4 и A_1A_3 , а B_4, B_3 — точки пересечения $A_{p-1}A_2$ с теми же диагоналями. (Если $p = 5$, то $B_4 = A_4$.) Из равенства площадей следует, что $B_1B_2 = B_2A_2$ и $A_1B_2 = B_2B_3$. Поэтому $A_1A_4 \parallel A_2A_{p-1}$. Противоречие.

459. Пусть $T_p(n)$ — множество всех чисел из T_p , меньших $(2^n)!$, и $N_p(n)$ — количество чисел в нем. Всякое число из $T_p(n)$

представимо в виде $\beta_0 + \beta_1 (2^1)! + \beta_2 (2^2)! + \dots + \beta_{n-1} (2^{n-1})!$. Пусть $A_p(n) - 1$ — наибольший из всех коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ среди *всех* чисел из $T_p(n)$. Для любого k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) коэффициент при $(2^k)!$ принимает не больше чем $A_p(n)$ различных значений. Поэтому $N_p(n) \leq (A_p(n))^n$. Осталось доказать следующие леммы.

$$1) A_{p+1}(n) \leq A_p(n) \cdot N_p(n) \leq (A_p(n))^{n+1};$$

$$2) A_{1987}(n) \leq 2^{(n+1)^{1987}};$$

$$3) 2^{(n+1)^{1987}} < (2^n)! \text{ при некотором } n;$$

$$4) (2^n)! > 2^{2^n} \text{ при } n \geq 2;$$

$$5) 2^n > (n+1)^{1987} \text{ при некотором } n.$$

460. а) Если $f(0) = a$, то $f(-a) = 0$ и $f(0) = -a$, так что $f(0) = 0$.

Равенство $f(x_0) = x_0$ при $x_0 \neq 0$ невозможно.

б) **Ответ:**

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 0, \\ -x/2 & \text{при } 4^k \leq |x| < 2 \cdot 4^k, \\ 2x & \text{при } 2 \cdot 4^{k-1} \leq |x| < 4^k. \end{cases}$$

461. Пусть A — вершина многогранника и AA_1, AA_2, \dots, AA_n — ребра, из нее выходящие. Ребро AA_1 красим в синий цвет, остальные ребра — в красный. Все звенья ломаной $A_2A_3 \dots A_n$ красим в синий цвет. Ребро A_1A_2 — в красный. Последовательно добавляем грани, примыкающие к уже покрашенной части многогранника. Если у грани оказались два покрашенных ребра, то третье ребро красим любым цветом, если покрашено одно ребро, то оставшиеся два красим разными цветами.

462. $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n - 1 = \frac{a_3}{(2n)^3} + \frac{a_5}{(2n)^5} + \dots$, где числа a_3, a_5, \dots положительны.

Темы, указанные в путеводителе, объединяют задачи по разным признакам: по методу, используемому в решении, либо по объекту, фигурирующему в условии.

1. Метод индукции

Метод доказательства некоторого утверждения для любого натурального n основан на следующем принципе: если утверждение верно для $n = 1$ и из справедливости его для $n = k$ вытекает справедливость этого утверждения для $n = k + 1$, то оно верно для всех n (*принцип математической индукции*). Часто доказательство по индукции имеет форму «спуска»: доказательство утверждения для некоторого n сводится к тому, что утверждение верно для некоторого меньшего значения $n_1 < n$; здесь используется принцип индукции в такой форме: если утверждение верно для $n = 1$ и (при $n > 1$) из справедливости его для всех $k < n$ следует справедливость для $k = n$, то утверждение верно для всех n . Иногда удобно начать индукцию не с $n = 1$, а с $n = 0$ или с некоторого $n = n_0$. Принцип индукции эквивалентен такой аксиоме: в любом множестве натуральных чисел есть наименьшее.

№ 223, 229, 231, 240, 246, 248, 260, 267, 277, 345, 367, 396, 4466.

2. Целые числа. Делимость

В разнообразных задачах про целые числа используются основные понятия и теоремы, связанные с делимостью. Каждое целое число a можно разделить на натуральное число m с остатком, т.е. представить в виде $a = mq + r$, где q и r (остаток) – целые числа и $0 \leq r < m$.

Среди любых m последовательных целых чисел найдется ровно одно число, делящееся на m . Если два числа a и b при делении на число m дают одинаковые остатки, то говорят, что a сравнимо с b по модулю m . Записывают это так: $a \equiv b \pmod{m}$.

Если a и b – натуральные числа и $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$), то, наибольший общий делитель d этих чисел равен наибольшему общему делителю b и r ; пользуясь этим утверждением несколько раз, можно найти его как последний не равный нулю остаток в цепочке делений с

остатком:

$$a = bq + r, b = rq_1 + r_1, r = r_1q_2 + r_2, r_1 = r_2q_3 + r_3, \dots$$

$$\dots, r_{n-1} = r_nq_{n+1} + d, r_n = dq_{n+2}$$

(алгоритм Евклида); отсюда следует, что существуют целые числа x и y , такие, что $d = ax + by$. В частности, если числа a и b взаимно просты, т.е. не имеют общих множителей, больших 1, то существуют целые x и y , для которых $ax + by = 1$.

Каждое натуральное число единственным образом представляется в виде произведения простых (*основная теорема арифметики*). Количество простых чисел бесконечно; доказательство этого утверждения по Евклиду основано на том, что произведение нескольких простых, сложенное с единицей, имеет отличные от всех этих простых чисел множители.

Если числа b_1, b_2, \dots, b_n попарно взаимно просты, то для любых остатков r_1, r_2, \dots, r_n ($0 \leq r_i < b_i$) найдется число a , которое при делении на b_i дает остаток r_i , т.е. $a \equiv r_i \pmod{b_i}$ при $i = 1, 2, \dots, n$ (*китайская теорема об остатках*).

№ 233, 254, 258, 260, 288, 306, 316, 322, 352, 360, 371, 386, 411, 416, 426, 436, 445, 449, 456,

3. Цифры и системы счисления

В задачах, где речь идет о цифрах в десятичной записи натурального числа $A = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \dots + a_1 \cdot 10 + a_0$ (эта запись иногда обозначается через $\overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$), используются разнообразные соображения: делимость целых чисел, алгебраические преобразования, оценки. В частности, полезен признак делимости на 3 и на 9, а также следующее его уточнение: число $A = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0}$ дает при делении на 9 (и на 3) тот же остаток, что и его сумма цифр (разность $A - (a_n + a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0) =$

$$= a_n(10^n - 1) + a_{n-1}(10^{n-1} - 1) + \dots + a_1(10 - 1),$$

очевидно, делится на 9).

Иногда оказывается полезной запись натурального числа A в системе счисления с основанием q :

$$A = a_n q^n + a_{n-1} q^{n-1} + \dots + a_1 q + a_0,$$

где a_i , $0 \leq a_i < q$ ($i = 1, 2, \dots, n$) – «цифры» этой системы счисления.

№ 244, 291, 294, 297, 329, 354, 396, 430, 439.

4. Числа рациональные и иррациональные

Рациональное число a представимо в виде $a = m/n$, где $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, а также в виде периодической бесконечной десятичной (q -ичной) дроби. Десятичные (q -ичные) дроби, представляющие *иррациональные* числа, не периодичны.

Вместе с иррациональным числом $a + b\sqrt{d}$ (где a и b – рациональные числа, d – целое, не являющееся квадратом натурального числа) полезно рассмотреть «сопряженное» с ним число $a - b\sqrt{d}$: его сумма и произведение с исходным – рациональные числа, так что $a \pm b\sqrt{d}$ являются корнями квадратного уравнения с целыми коэффициентами.

№ 257, 268, 303, 356, 370, 379, 422.

5. Квадратный трехчлен. Непрерывные функции, графики и корни уравнений

В большинстве задач, сводящихся к исследованию квадратичной функции $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, полезно представить себе ее график. Если он пересекает ось Ox в двух точках (корнях) x_1 и x_2 , то между корнями значения функций $y = f(x)$ противоположны по знаку числу a , а вне отрезка $[x_1, x_2]$ – совпадают по знаку с числом a . При этом вершина параболы $y = f(x)$ (абсцисса которой равна полусумме корней) соответствует точке экстремума функции $y = f(x)$: минимума, если $a > 0$, и максимума, если $a < 0$.

В ряде задач полезно использовать такой факт: если непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция $y = f(x)$ принимает в концах этого отрезка значения разных знаков, то между точками a и b лежит хотя бы один корень уравнения $f(x) = 0$.

№ 228, 242, 259, 264, 269, 278, 299, 308, 339, 359, 383, 400, 418.

6. Алгебра многочленов

Многочлен $P(x)$, имеющий число a корнем, делится на двучлен $x - a$, т.е. представляется в виде $P(x) = (x - a)Q(x)$, где $Q(x)$ – многочлен на единицу меньшей степени (при этом, если $P(x)$ имеет целые коэффициенты, то и $Q(x)$ – тоже). Многочлен степени n имеет не более n корней (даже с учетом кратности). Отсюда следует, что если два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ степени не большей n принимают одинаковые значения более, чем в n точках, то их коэффициенты при соответствующих степенях равны.

Часто используются тождества для многочленов с двумя переменными x и y :

$$x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}),$$

$$x^{2m+1} + y^{2m+1} = (x + y)(x^{2m} - x^{2m-1}y + x^{2m-2}y^2 - \dots - xy^{2m-1} + y^{2m}),$$

а также формула «бинома Ньютона»

$$(x + y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} y + C_n^2 x^{n-2} y^2 + \dots + C_n^{n-1} x y^{n-1} + y^n,$$

где биномиальные коэффициенты вычисляются по формулам

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

№ 242, 251, 258, 325, 347, 439.

7. Тождества. Уравнения и системы уравнений

При решении и исследовании уравнений, помимо обычных «школьных» методов (подстановки, замены переменной, преобразования), иногда используются соображения монотонности: если функция $y = f(t)$ строго возрастает или строго убывает, то уравнения $f(g_1) = f(g_2)$ и $g_1 = g_2$ равносильны. При решении систем уравнений иногда бывают полезны геометрическая интерпретация, соображения симметрии и т.д.

Ряд задач связан с линейными соотношениями между несколькими переменными.

№ 243, 276, 292, 353, 357, 364, 382, 414, 460.

8. Неравенства

Среди часто используемых неравенств отметим следующие

1) $|x + y| \leq |x| + |y|, \quad |x - y| \geq |x| - |y|;$

2) $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ для любых $a \geq 0, b \geq 0$;

3) если a_1, a_2, \dots, a_n — неотрицательные числа, то

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

(неравенство Коши между средним геометрическим и средним арифметическим);

4) $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2) / n$ (для любых a_1, a_2, \dots, a_n);

5) для положительных чисел a, b дробь $\frac{c+d}{a+b}$ заключена между дробями $\frac{c}{a}$ и $\frac{d}{b}$;

6) $\sin x < x$ при $x > 0$.

№ 232, 264, 267, 278, 279, 299, 308, 311, 319, 325а, 335, 341, 346, 354, 357, 365, 372, 375, 377, 392, 403, 427, 436, 452, 462.

9. Принцип Дирихле

Если в k клетках больше nk зайцев, то хотя бы в одной клетке сидит больше n зайцев. Подобные соображения используются в разных задачах для доказательства существования [65].

Приведем еще несколько похожих на «принцип Дирихле» (и столь же очевидных) утверждений, используемых в геометрических и аналитических задачах. Если сумма площадей нескольких фигур меньше S , то ими нельзя покрыть фигуру площади S . Если на отрезке длины 1 расположено несколько отрезков с суммой длин L , то найдется точка, покрытая не более чем $[L]$ этими отрезками. Если среднее арифметическое нескольких чисел больше a , то хотя бы одно из этих чисел больше a .

№ 220, 342, 367, 444, 446.

10. Комбинаторика

Основной прием в задачах на подсчет числа различных комбинаций элементов конечного множества – установление соответствия между множествами, заданными различными условиями.

В частности, множество всех упорядоченных наборов из n единиц и нулей – всего таких наборов 2^n – может быть поставлено в соответствие множеству всех подмножеств данного множества из n элементов. Множество таких наборов, содержащих k единиц, соответствует множеству всех k -элементных подмножеств n -элементного множества. Всего таких наборов

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}.$$

При $n = 2$ это – число неупорядоченных пар элементов из данного множества: $C_n^2 = n(n-1)/2$.

Число перестановок (упорядочений) данного множества из n элементов равно $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$.

№ 231, 246, 301, 361, 439, 442.

11. Графы, отображения

Изображая элементы некоторого множества точками и соединяя некоторые пары точек отрезками, мы получаем наглядное представление для очень популярного объекта дискретной математики. Он называется *графом*; точки (элементы множества) называются *вершинами*, отрезки (или дуги) – *ребрами* графа. Граф, из любой вершины которого можно пройти в любую другую путем, состоящим из ребер, называется *связным*. Замкнутый путь по ребрам графа называется *циклом*. Связный граф без циклов – *дерево* – имеет

вершин на одну больше, чем ребер. Если все циклы графа имеют четную длину, то его вершины можно раскрасить в два цвета так, что вершины одного цвета не соединены ни одним ребром; такой граф называется двудольным.

Если на ребрах графа расставить стрелки, то получится ориентированный граф (*орграф*). Любое отображение f конечного множества A в себя задает орграф, из каждой вершины $a \in A$ которого выходит одна стрелка – в вершину $f(a)$. (При этом возможны и петли – стрелки, идущие из a в a ; они соответствуют *неподвижным точкам* отображения f .) Если f взаимно однозначно, то орграф распадается на циклы (и петли).

Один из примеров сложного графа – схема телефонной сети.

Рассматриваются также графы, ребра или вершины которых раскрашены в несколько цветов или помечены числами.

№ 240, 271, 290, 296, 310, 317, 421, 461.

12. Четность, раскраска. Задачи на решетках

В задачах про графы часто важны соображения четности. Например, число вершин, к которым примыкает нечетное число ребер, всегда четно. Соображения подобного рода полезны и в других задачах; например, для решения классической задачи: можно ли шахматную доску 8×8 клеток без двух клеток в противоположных углах покрыть «доминошками» 1×2 – достаточно заметить, что каждая доминошка покрывает две клетки разного цвета (при обычной шахматной раскраске), а угловые клетки – одного цвета. Бывает полезна и раскраска в большее число цветов.

№ 235, 247, 262, 333, 364, 374, 413.

Помимо четности или раскраски, в задачах на клетчатой бумаге и других плоских и пространственных решетках также нередко используются различные геометрические и комбинаторные соображения, метод координат. Бывает полезно рассмотреть клетчатую бумагу как числовую плоскость, на которой узлы решетки – точки с целочисленными координатами, или квадрат из p^2 узлов, координаты которых – пары остатков (x, y) при делении на p .

№ 229, 265, 275, 295, 304, 314, 349, 362, 397, 416, 425, 433, 444, 446, 457.

13. Операции и инварианты

В задачах, где требуется выяснить, можно ли с помощью заданных операций перейти от одного из объектов к другому, часто полезно найти «инвариант» – числовую характеристику объектов (или функцию с какими-то другими значениями на множестве объектов), которая не меняется при указанных операциях. Если при этом значение

инварианта на двух объектах различно, то превратить один в другой нельзя. В целочисленных и других «дискретных» задачах инвариантом часто служит остаток от деления на 2 (четность) или на другое натуральное число.

Если все выполняемые операции обратимы, то все множество объектов, над которыми они выполняются, разбивается на классы эквивалентности (два объекта эквивалентны, если один из них может быть получен из другого заданными операциями).

№ 233, 260, 276, 321, 425.

В задачах, где требуется оценить количество операций или доказать, что их нельзя продлевать бесконечное число раз (скажем, убедиться в отсутствии «цикла»), иногда бывает полезно придумать функцию, которая при каждой операции возрастает (или при каждой операции убывает).

№ 271, 283, 409.

14. Расстановки цифр и целых чисел, их преобразования. Турниры

В решениях задач о конечных последовательностях из целых чисел, букв, фишек, расстановках их по окружности или в таблице сочетаются различные соображения, связанные с делимостью, комбинаторикой, оценками, использующими индукцию.

№ 221, 224, 229, 231, 238, 275, 281, 300, 307, 321, 323, 337, 340, 345, 350, 385, 390, 391, 409, 413, 432, 435, 442, 456.

Задачи о турнирах, набранных очках и занятых участниками местах, объединенные спортивной тематикой:

№ 317, 441.

15. Планиметрия

Почти в каждом варианте олимпиадных задач встречается традиционная школьная, хотя и не простая, задача по геометрии. Среди наиболее распространенных геометрических теорем, используемых для их решения, отметим следующие. Угол между касательной и секущей окружности равен полуразности величин дуг, заключенных между сторонами угла; квадрат длины касательной равен произведению отрезков секущей от вершины угла до точек ее пересечения с окружностью. Касательные, проведенные из одной точки к окружности, равны; четырехугольник описан около окружности, если и только если суммы противоположных сторон равны. Площадь описанного многоугольника равна половине произведения периметра на радиус окружности.

№ 222, 237, 253, 305, 332, 378, 381, 393, 412, 428, 447, 450, 454.

В отдельные группы выделим задачи

а) о правильных многоугольниках:

№ 226, 398, 408, 434, 443;

б) использующие понятие «геометрического места» (множества) точек:

№ 270, 424;

в) на применение геометрических преобразований (поворотов, параллельных переносов, подобий и их композиций):

№ 222, 253, 259, 298, 309, 315, 373, 399, 414, 460;

г) задачи, в которых речь идет о площади фигур (или, как нередко бывает, площадь служит вспомогательным инструментом в решении):

№ 261, 255, 285, 312, 327, 363, 366, 384, 395, 415, 438, 458.

16. Стереометрия

В решениях задач полезно рассмотреть проекции фигур на плоскость (или на прямую). Отметим также теорему, не входящую обычно в школьный курс: в трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других.

№ 234, 241, 255, 266, 299, 326, 348, 358, 394, 417, 461.

17. Комбинаторная геометрия

Это название относится к разнообразным оценкам, связанным с размещениями, покрытиями, различными комбинациями фигур. Здесь используются самые общие свойства, связанные с расположением фигур на плоскости (и в пространстве).

Укажем среди них теорему Жордана: любая несамопересекающаяся замкнутая ломаная делит плоскость на две области – внутреннюю и внешнюю, причем любой путь из точки внутренней области в точку внешней пересекает эту ломаную, а две точки каждой области можно соединить путем, не пересекающим ломаной.

Напомним определение выпуклого множества: это – множество, которое вместе с каждыми двумя точками содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки. *Выпуклой оболочкой* фигуры называется наименьшее выпуклое множество, содержащее эту фигуру; выпуклая оболочка конечного множества – многоугольник (в пространстве – многогранник) с вершинами в некоторых из данных точек.

Вместе с данной фигурой бывает полезно рассмотреть ее *r-окрестность*: множество точек, наименьшее расстояние от которых до точек фигуры меньше чем r ; две фигуры (в частности, точки) находятся на расстоянии не меньше $2r$, если и только если их r -окрестности не пересекаются.

№ 226, 227, 229, 230, 235, 237, 249, 255, 277, 314, 324, 338, 351, 406, 448, 461.

18. Геометрические неравенства, оценки, экстремумы

Среди многочисленных теорем, используемых в оценках и доказательстве неравенств геометрическими средствами, отметим следующие, наиболее распространенные. В треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других (неравенство треугольника). Угол треугольника меньше, равен или больше 90° в зависимости от того, меньше, равен или больше суммы квадратов двух прилежащих к нему сторон квадрату противоположащей стороны. Длина проекции отрезка на плоскость или прямую не больше длины этого отрезка. Площадь проекции многоугольника на любую плоскость не больше площади многоугольника.

№ 222, 225, 261, 266, 269, 282, 290, 287, 299, 302, 318, 320, 334, 348, 355, 365, 368, 388, 394, 420, 431, 438.

19. Векторы

Кроме наиболее стандартных операций над векторами – сложения, вычитания и умножения на число – полезно использовать также скалярное произведение $\vec{u}\vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}|\cos\alpha$, где $\alpha = \angle(\vec{u}, \vec{v})$. Если $\vec{u} = (x_1, y_1)$, $\vec{v} = (x_2, y_2)$, то $\vec{u}\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2$.

Для любых n точек плоскости (или пространства) A_1, A_2, \dots, A_n существует единственная точка O (центр тяжести) такая, что

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n} = 0.$$

№ 222, 225, 234, 270, 274, 280, 293, 315, 336, 366, 373, 404, 434, 457.

20. Оценки и экстремальные задачи для наборов чисел и таблиц

Во многих олимпиадах встречаются задачи о сравнении по величине чисел из некоторого конечного набора, расположениях точек на прямой, оценках сумм, разностей и других функций, связанных с числовым набором или таблицей.

№ 232, 252, 283, 344, 354, 369, 377, 453.

Часто в таких задачах бывает полезным:

а) выбрать наибольшее или наименьшее число из набора («принцип крайнего»):

№ 243, 246, 248, 283, 337, 343, 380, 401, 409;

б) упорядочить числа набора по величине:

№ 245, 250, 346, 410.

21. Последовательности

Последовательность x_n называется периодической, если $x_{n+1} = x_n$, $n \in \mathbf{N}$ (натуральное число t – период). В ряде задач встречаются *рекуррентные* последовательности x_n – такие, для которых $x_{n+1} = f(x_n)$, где f – некоторая функция, либо каждый член (начиная с $(k+1)$ -го) определяется через k предыдущих. Такова, например, последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, в которой каждый член равен сумме двух предыдущих. В оценках последовательностей часто помогает метод индукции, используются «огрубление» оценок и соображения монотонности.

№ 223, 251, 255, 257, 267, 273, 303, 313, 328, 356, 402, 405, 459.

Число a называется пределом последовательности x_n , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое N , что для любого $n > N$ выполнено неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

№ 239, 268, 300, 389, 451.

22. Игры, преследование, стратегии и алгоритмы

Решение задач, в которых речь идет о достижении цели с помощью последовательности ходов – в частности, требуется выяснить, кто из игроков побеждает в той или иной игре – требует описания стратегии, правила выбора ходов, обеспечивающего достижение цели; в задачах про игры (или в задачах «погони», преследования) при этом требуется доказать, что стратегия обеспечивает выигрыш при любом поведении партнера.

№ 242, 250, 256, 262, 283, 330, 376, 455.

23. Интересные примеры и конструкции

Во многих задачах наиболее трудная часть решения – не доказательство, а построение необычного примера.

№ 230, 231, 244, 257, 263, 300, 371, 398, 401, 416, 423, 444, 446, 456, 460.

К этим задачам относятся и такие, где построение и исследование примера – многошаговая конструкция (при этом часто используется принцип индукции).

№ 238, 272, 281, 405.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕНИРОВКИ

Здесь приведены около ста задач для самостоятельного решения. Их расположение в основном следует тематическому путеводителю. Некоторые темы («индукция», «принцип Дирихле») представлены полнее, другие, более связанные со школьным курсом – меньше; к последним, в частности, относятся геометрические темы, которым посвящены большие сборники [31], [49]. Среди включенных в этот список задач несколько классических теорем, разбираемых обычно на занятиях кружков, но основная часть – задачи, предлагавшиеся на областных и республиканских турах олимпиады. Несколько задач предлагались на Турнире городов.

1. Докажите для любого натурального n равенство

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n+1)!$$

2. Докажите, что при любом натуральном n

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

3. Докажите, что $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} > \frac{n}{2}$ при $n > 1$.

4. а) На сколько частей делят плоскость n прямых, из которых никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

б) Докажите, что n плоскостей в общем положении (никакие три не параллельны одной прямой и никакие четыре не проходят через одну точку) делят пространство на $(n^3 + 5n)/6 + 1$ частей.

5. а) Плоскость разбита несколькими окружностями на части. Докажите, что каждую часть можно выкрасить одной из двух красок так, чтобы две части, граничащие по дуге, были выкрашены в разные краски.

б) На плоскости расположены несколько «треножников» (треножник состоит из трех лучей с общей вершиной). Докажите, что части, на которые они разбивают плоскость, можно выкрасить в три краски так, чтобы две части, граничащие по отрезку или лучу, были выкрашены в разный цвет.

6. В таблице из трех строк и n столбцов расставлены произвольным образом фишки трех цветов: n белых, n красных и n зеленых. Докажите,

что можно переставить фишки в каждой строке так, чтобы в каждом столбце стояли фишки трех разных цветов.

7. По окружности расставлены n точек – черных и красных. Докажите, что можно провести не более чем $3n/2 - 2$ хорды с концами в точках разного цвета, не пересекающиеся внутри окружности.

8. Докажите, что каждое целое неотрицательное число единственным образом представляется в виде $x + (y^2 + y) \cdot 2$, где x и y – целые неотрицательные числа, $x \leq y$.

9. Число $\alpha + 1/\alpha$ – целое. Докажите, что тогда число $\alpha^n + 1/\alpha^n$ – целое при любом натуральном n .

10. Докажите, что n участникам теннисного турнира, где каждые двое встречались один раз, можно присвоить номера $1, 2, \dots, n$ так, что k -й выиграл у $(k+1)$ -го (для всех $k = 1, 2, \dots, n-1$).

11. В городе живут N жителей, любые два из которых либо друзья, либо враги. Каждый день не более чем один житель может начать «новую жизнь»: перессориться со всеми своими друзьями и подружиться со всеми своими врагами. Известно, что любые трое могут подружиться. Докажите, что все жители могут подружиться.

12. а) На какую наибольшую степень числа 3 делится число $2^{3^n} + 1$?

б) Докажите, что число, записываемое в десятичной системе 3^n единицами, делится на 3^n и не делится на 3^{n+1} .

13. Докажите, что с помощью n гирь массами $1, 3, 9, \dots, 3^{n-1}$ граммов можно взвесить на чашечных весах любой предмет массой $M \leq (3^n - 1)/2$ граммов (M – целое число, гири можно класть на обе чашки весов).

14. Отрезок длиной 3^k разбивается на три равные части. Первая и третья из них называются отмеченными. Каждый из отмеченных отрезков снова разбивается на три части, из которых 1-я и 3-я снова называются отмеченными и т.д. до тех пор, пока не получатся отрезки длиной 1. Концы всех отмеченных отрезков называются отмеченными точками. Докажите, что для любого натурального d , меньшего 3^k , можно найти две отмеченные точки, расстояние между которыми равно d .

15. а) Докажите равенство

$$(1+2)(1+2^2)(1+2^{2^2})\dots(1+2^{2^{2^n}}) = 2^{2^{n+1}} - 1.$$

б) Докажите, что любые два числа последовательности $3, 5, 17, \dots, 1 + 2^{2^n}, \dots$ взаимно просты.

16. 15 простых чисел образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что разность прогрессии больше 30000.

17. Натуральное число x делят последовательно на все числа от 2 до $x - 1$ и выписывают получившиеся остатки. Найдите x , для которого сумма всех различных выписанных остатков равна x .

18. Докажите, что произведение цифр натурального числа, большего 100, не превосходит $27/37$ этого числа.

19. Подряд выписано 99 девяток. Докажите, что к ним можно приписать справа еще ровно 100 цифр так, что получившееся 199-значное число окажется квадратом целого числа.

20. Докажите, что существуют иррациональные числа α и β такие, что α^β рационально.

21. Пусть α и β – иррациональные числа, связанные соотношением $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Докажите, что среди чисел $[n\alpha]$ и $[m\beta]$, где n и m – всевозможные целые числа, каждое целое число встречается ровно один раз.

22. Докажите, что первые n знаков после запятой в десятичном разложении числа $(\sqrt{26} + 5)^n$ – все нули или все девятки.

23. а) Докажите, что если $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ – рациональные числа, то $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ – рациональные при любом натуральном n .

б) Докажите, что для любого N существуют N точек плоскости, никакие три из которых не лежат на прямой, все попарные расстояния между которыми – целые числа.

24. Найдите a и b такие, что каждый из квадратных трехчленов $x^2 - ax + b$ и $x^2 - bx + a$ имеет различные целые положительные корни.

25. Докажите, что если \overline{abc} – трехзначное простое число, то $b^2 - 4ac$ не может быть полным квадратом.

26. Докажите, что если $a^2 + pa + q = 0$ и $b^2 - pb - q = 0$, то уравнение $x^2 + 2px + q = 0$ имеет корень, заключенный между a и b ($q \neq 0$).

27. Докажите, что для любых чисел p и q суммарная длина отрезков оси Ox , на которых выполняется неравенство $|x^2 + 2px + 2q| \leq 2$, не превосходит 4.

28. Укажите все целые n , для которых: а) $n^2 + 1$ делится на $n + 5$; б) $n^5 + 3$ делится на $n^2 + 1$.

29. Найдите все многочлены $F(x)$, для которых $F(x + y) = F(x) + F(y) + 3xy(x + y)$ при всех x и y .

30. На встрече собрались все участники двух туристских походов (некоторые из них были в двух походах, некоторые – только в одном). В первом походе было 60% мужчин, во втором – 75%. Докажите, что на встречу пришло не меньше мужчин, чем женщин.

31. Какое число больше: $\sqrt{1001} + \sqrt{999}$ или $2\sqrt{1000}$?

32. Докажите, что при любом n

$$\left(1 + \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \left(1 + \frac{1}{15}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) < 2.$$

33. Докажите неравенство

$$\frac{1}{15} < \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{5} \cdot \dots \cdot \frac{99}{100} < \frac{1}{10}.$$

34. Пусть $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 0$, m – наименьшее, M – наибольшее из чисел x_1, x_2, \dots, x_k . Докажите неравенство

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_k^2 \leq -kmM.$$

35. Сумма неотрицательных чисел a, b, c равна 1. Докажите неравенство $a^2b + b^2c + c^2a \leq 4/27$.

36. На окружности расставлено n чисел, сумма которых положительна. Докажите, что можно выбрать из них такое число, которое само положительно, а также сумма его со следующим, со следующими двумя, ..., со следующими $n - 2$ числами – все положительны (окружность обходится против часовой стрелки).

37. Докажите, что для любого натурального числа можно найти делящееся на него число вида $111\dots100\dots0$ (в десятичной записи которого встречаются только единицы и нули).

38. В группе 30 человек. Каждому нравятся ровно k людей из этой группы. При каком наименьшем k можно утверждать, что обязательно найдутся два человека из этой группы, которые нравятся друг другу?

39. Задано число α . Докажите, что для любого натурального N можно найти целое n такое, что $0 \leq n \leq N$ и αn отличается от целого числа меньше чем на $1/N$.

40. На земле живут 5 миллиардов человек, из которых менее 1% имеют возраст свыше 100 лет. Докажите, что найдутся 100 человек, родившихся в одну и ту же секунду.

41. Имеется 30 медных монет. Докажите, что из них можно собрать сумму в 30 копеек (Медными называем монеты стоимостью в 1, 2, 3, 5 копеек).

42. На полосе бумаги записана последовательность из 360 цифр 1 231 231 ... 123 123 ... 123. На какое наибольшее число частей можно разрезать полосу, чтобы все числа на полученных кусках ленты были различными?

43. а) Докажите, что из любых n натуральных чисел, меньших $2n - 1$, можно выбрать два, из которых одно делится на другое.

б) Докажите, что из n различных натуральных чисел, меньших $2n - 2$, можно выбрать три, большее из которых равно сумме двух других.

44. Какое наибольшее число точек можно расставить на отрезке длиной 1 так, чтобы на любом содержащемся в нем отрезке длины d лежало не более $1 + 100d^2$ из расставленных точек?

45. а) В окружности диаметра 1 проведено несколько хорд. Докажите, что если каждый диаметр пересекает не более k хорд, то сумма длин всех хорд меньше $3,15k$.

б) В кубе с ребром a лежит ломаная, которую каждая плоскость, параллельная одной из граней, пересекает не более k раз. Докажите, что длина ломаной не больше $3ka$.

46. На площади $1 \text{ км} \times 1 \text{ км}$ растет сосновый лес, состоящий из 4 500 деревьев диаметром 50 см каждое. Докажите, что на этом квадратном участке можно разместить 50 прямоугольных площадок $10 \text{ м} \times 20 \text{ м}$, на которых не растет ни одного дерева.

47. На окружности отмечены 100 точек A_1, A_2, \dots, A_{100} . Каких выпуклых многоугольников больше: тех, у которых A_1 является вершиной, или остальных? На сколько?

48. Каких шестизначных чисел больше: таких, которые можно представить в виде произведения двух трехзначных, или таких, которые нельзя?

49. а) Можно ли все десятизначные числа, записываемые при помощи цифр 1 и 2, разбить на две группы так, чтобы сумма любых двух чисел в каждой группе содержала в десятичной записи не менее двух цифр 3?

б) Докажите, что среди n -значных чисел из цифр 1 и 2 нельзя выбрать более $2^n / (2n + 1)$ чисел, каждые два из которых отличались бы по крайней мере в трех разрядах.

50. а) Сколькими способами можно раскрасить n разными красками круг, разбитый на p секторов, где p – простое число? (Каждый сектор окрашивается одной краской; все краски использовать не обязательно; две раскраски, совпадающие при повороте круга, считаются одинаковыми.)

б) Докажите, что при любом натуральном n и простом p число $n^p - n$ делится на p (*малая теорема Ферма*).

51. На фестиваль собрались 6 музыкантов. На каждом концерте часть музыкантов выступает, а остальные слушают их из зала. За какое наименьшее число концертов каждый из шести музыкантов сможет послушать (из зала) каждого из остальных?

52. В городе X , где все семьи живут в отдельных домах, разрешаются только парные обмены одного домика на другой (семьи, которые меняются домами, в тот же день не участвуют в других обменах). Докажите, что любой сложный обмен домами в городе X можно осуществить за два дня.

53. Докажите, что из куска проволоки длиной 120 см, не разламывая его, нельзя сделать каркас куба с ребром 10 см.

54. В пруд пустили 30 щук, которые постепенно поедают друг друга. Щука считается сытой, если она съест трех щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться?

55. Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из любого города можно было попасть в любой другой, сделав не более двух пересадок?

56. Каждая из 8 футбольных команд сыграла с каждой из остальных по одной игре. При этом не было ничьих. Докажите, что можно выделить такие четыре команды A, B, C, D , что A выиграла у B, C и D , B выиграла у C и D , C выиграла у D .

57. Докажите, что двадцать карточек, на которых написаны цифры 0, 1, ..., 9 (каждая – на двух карточках), нельзя выложить в ряд так, чтобы между карточками с цифрами « k » лежало ровно k других карточек (для всех $k = 0, 1, \dots, 9$).

58. Написано $(2m + 1)$ -значное число. Докажите, что можно вычеркнуть одну из его цифр так, что в полученном $2m$ -значном числе количество семерок на четных местах будет равно количеству семерок на нечетных местах.

59. Можно ли найти 100 различных нечетных чисел a_1, a_2, \dots, a_{100} таких, что $1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_{100} = 1$?

60. Докажите, что шахматную доску 50×50 клеток нельзя разбить на фигурки из четырех клеток в форме буквы Т.

61. Докажите для любого натурального n равенство

$$\left[\sqrt{n} \right] + \left[\sqrt[3]{n} \right] + \dots + \left[\sqrt[n]{n} \right] = \left[\log_2 n \right] + \left[\log_3 n \right] + \dots + \left[\log_n n \right].$$

62. Из двух точек, заданных на плоскости, разрешается получать третью, симметричную одной из них относительно другой. Даны три вершины квадрата. Можно ли из них указанными операциями получить четвертую вершину этого квадрата?

63. Любую вершину треугольника разрешается симметрично отразить относительно другой и заменить ее полученной точкой. Можно ли такими операциями любой треугольник превратить в прямоугольный или остроугольный?

64. Докажите, что площадь многоугольника с вершинами в узлах клетчатой бумаги равна $i + r/2 - 1$, где i – число узлов, лежащих внутри этого многоугольника, r – число узлов, лежащих на его сторонах и в вершинах; сторона клетки принята за 1 (*теорема Пика*).

65. Имеется много одинаковых правильных треугольников, вершины каждого из которых помечены (в произвольном порядке) цифрами 1, 2 и 3. Треугольники сложили в стопку и нашли суммы чисел в каждой вершине. Может ли оказаться, что в каждом углу она равна: а) 25? б) 50?

66. Дан невыпуклый многоугольник. С ним проделывают следующую операцию: выбирают некоторые две несоседние вершины A и B так, что многоугольник лежит целиком по одну сторону от прямой AB , и часть контура между точками A и B симметрично отражают относительно середины отрезка AB . Если вновь получился невыпуклый многоугольник, операцию повторяют. Докажите, что после конечного числа операций многоугольник станет выпуклым.

67. В вершинах правильного: а) 7-угольника, б) 8-угольника, в) n -угольника ($n \geq 9$) расставлены черные и белые фишки. Верно ли, что найдутся три фишки одного цвета, стоящие в вершинах равнобедренного треугольника?

68. Можно ли занумеровать ребра куба числами $1, 2, 3, \dots, 12$ так, чтобы для каждой вершины сумма номеров выходящих из нее ребер была одинаковой? Можно ли расставить на ребрах числа $-6, -5, \dots, -2, -1, 1, 2, \dots, 6$ так, чтобы выполнялось такое же условие?

69. Три равных окружности пересекаются в одной точке. Докажите, что три другие точки попарного пересечения этих окружностей лежат на окружности того же радиуса.

70. По двум прямым, пересекающимся в точке P , равномерно с одинаковой скоростью движутся точки: по одной прямой M , по другой — N . Через точку P они проходят не одновременно. Докажите, что окружность, описанная вокруг треугольника MNP , все время проходит через некоторую фиксированную точку, отличную от P .

71. Докажите, что если точки A, B, C, D , лежащие на окружности, таковы, что касательные в точках A и C пересекаются на прямой BD , то касательные в точках B и D пересекаются на прямой AC .

72. На сторонах AB и BC треугольника ABC во внешнюю сторону построены квадраты $ABDK$ и $CBEL$. Докажите, что продолжением высоты BH треугольника ABC служит медиана треугольника DBE .

73. Докажите, что внутри треугольника, углы которого меньше 120° , существует единственная точка T , из которой все стороны видны под углами 120° , и что сумма расстояний от точки T до вершин треугольника меньше, чем от любой другой точки плоскости.

74. Пусть a, b, c и d — последовательные стороны четырехугольника. Докажите, что площадь четырехугольника не больше:

а) $(ab + cd)/2$; б) $(ac + bd)/2$.

75. На каждой стороне параллелограмма выбрано по точке. Докажите, что если площадь четырехугольника с вершинами в этих точках равна половине площади параллелограмма, то хотя бы одна из диагоналей четырехугольника параллельна одной из сторон параллелограмма.

76. На основании AB трапеции $ABCD$ задана точка K . Где на основании CD нужно выбрать точку M , чтобы площадь четырехуголь-

ника, получающегося при пересечении треугольников AMB и CKD , была наибольшей?

77. Можно ли расположить на плоскости 7 точек так, чтобы среди любых трех из них нашлись две на расстоянии 1?

78. Проекция плоской фигуры на любую прямую в ее плоскости имеет длину не больше 1. Верно ли, что эту фигуру можно поместить в окружность диаметра: а) 1? б) 1,5?

79. Параллелепипед разрешается перемещать в пространстве. Докажите, что его «тень» – ортогональная проекция на горизонтальную плоскость – будет иметь наибольшую площадь в том положении, когда некоторые три вершины параллелепипеда лежат в одной горизонтальной плоскости.

80. Найдите зависимость длительности T самого короткого дня в пункте, расположенном на поверхности Земли, от его широты φ ($0 \leq \varphi \leq \pi/2$). Землю можно считать шаром, ось вращения которого образует с плоскостью движения Земли вокруг Солнца известный угол α .

81. 300 человек выстроены в прямоугольник 30×10 (30 человек в каждой шеренге и 10 человек в каждой колонне). Из каждой шеренги выбрали самого высокого; самым низким из этих 10 человек оказался Петров. Затем из каждой колонны выбрали самого низкого; самым высоким из них оказался Иванов. Кто выше: Иванов или Петров?

82. Числа 1, 2, 3, ..., 81 расставляют в таблицу 9×9 так, чтобы в каждой строке числа были расположены в порядке возрастания. Какое наибольшее и какое наименьшее значение может иметь сумма чисел в пятом столбце?

83. В таблицу $n \times n$ расставлены целые неотрицательные числа. Известно, что если на пересечении строки и столбца стоит 0, то сумма остальных $2n - 1$ чисел в образуемом ими «кресте» не меньше n . Докажите, что сумма всех n^2 чисел не меньше $n^2/2$.

84. Решите систему уравнений

$$x_1 + \sqrt{x_2} = 1, \quad x_2 + \sqrt{x_3} = 1, \dots, \quad x_8 + \sqrt{x_9} = 1, \quad x_9 + \sqrt{x_1} = 1.$$

85. Двое играют в такую игру. Перед ними две кучки спичек. Один из них выбрасывает какую-нибудь кучку, а оставшуюся разбивает на две. Второй снова выбрасывает одну из кучек, а другую делит на две и так далее. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход из-за того, что в каждой кучке осталось по одной спичке. Кто выиграет при правильной игре – начинающий или его партнер, если вначале в одной кучке было 19 спичек, а в другой 88?

86. Имеется несколько кучек камней. Двое играют в игру, ход которой состоит в том, что игрок разбивает каждую кучку, состоящую более чем из одного камня, на две меньшие кучки. Ходы делаются

поочередно до тех пор, пока во всех кучках не останется по одному камню. Победителем считается игрок, сделавший последний ход. Как должен играть начинающий, если сначала в каждой кучке было от 80 до 120 камней?

87. Среди n одинаковых по виду монет могут быть одна или две фальшивых, отличающихся от остальных по весу (но может не быть и ни одной фальшивой; если фальшивых две, то они между собой равны по весу). За три взвешивания на чашечных весах без гирь нужно определить, есть ли фальшивые монеты и какие монеты тяжелее – фальшивые или настоящие. Как это сделать, если: а) $n = 8$; б) n – любое целое число, $n > 8$?

88. N друзей одновременно узнали N новостей, причем каждый узнал одну новость. Они стали звонить друг другу и обмениваться новостями. Каждый разговор длится один час. За один разговор можно передать сколько угодно новостей. Какое минимальное количество часов необходимо, чтобы все узнали все новости? Укажите ответ, если: а) $N = 64$, б) $N = 55$, в) $N = 100$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Сборники олимпиадных задач и книги об олимпиадах

1. *Бабинская И.Л.* Задачи математических олимпиад. – М.: Наука, 1975.
2. *Белоусов В.Д., Изман М.С, Солтан В.П., Чиник Б.И.* Республиканские математические олимпиады – Кишинев: Штиинца, 1986.
3. *Брудно А.Л., Каплан А.И.* Олимпиады по программированию для школьников. – М.: Наука, 1985.
4. *Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л., Раббот Ж.М., Тоом А.Л.* Заочные математические олимпиады. – М.: Наука, 1986.
5. *Васильев Н.Б., Егоров А.А.* Сборник подготовительных задач к Всероссийской олимпиаде юных математиков. – М.: Учпедгиз, 1963.
6. *Васильев Н.Б., Савин А.П.* Избранные задачи математических олимпиад. – М.: Изд-во МГУ, 1968.
7. Венгерские математические олимпиады. – М.: Мир, 1976.
8. *Вышенский В.А., Карташов Н.В., Михайловский В.И., Ядренко М.И.* Сборник задач Киевских математических олимпиад. – Киев: «Вища школа», 1984.
9. Задачи Московских математических олимпиад/Сост. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. – М.: Просвещение, 1986.
10. Избранные задачи (из журнала *American Mathematical Monthly*). – М.: Мир, 1977.
11. Математические олимпиады: Сб. статей/Под ред. А.М.Абрамова. – М.: Просвещение, 1988.
12. *Морозова Е.А., Петраков И.С.* Международные математические олимпиады. – М.: Просвещение, 1976.
13. Сборник задач московских математических олимпиад/Сост. Леман А.А. – М.: Просвещение, 1965.
14. *Петраков И.С.* Математические олимпиады школьников. – М.: Просвещение, 1982.
15. Польские математические олимпиады. – М.: Мир, 1978.
16. Олимпиады, алгебра, комбинаторика/Под ред. Л.Я.Савельева. – Новосибирск: Наука (Сибирское отделение), 1979.
17. Физико-математические олимпиады/Сост. Брук Ю.М., Савин А.П. – М.: Знание, 1977.

Книги из серии «Библиотечка физико-математической школы», – М.: Наука

18. Башмаков М.И. Уравнения и неравенства. – 1976.
19. Васильев Н.Б., Гуенмахер В.Л. Прямые и кривые. – 1978.
20. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Кириллов А.А. Метод координат. – 1973.
21. Гельфанд И.М., Глаголева Е.Г., Шноль Э.Э. Функции и графики. – 1973.
22. Кириллов А.А. Пределы. – 1973.
23. Васильев Н.Б., Молчанов С.А., Розенталь А.Л., Савин А.П. Математические соревнования (геометрия). – 1974.

Книги из серии «Популярные лекции по математике», – М.: Наука

24. Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. – 1983.
25. Виленкин Н.Я. Метод последовательных приближений. – 1968.
26. Гельфонд А.О. Решение уравнений в целых числах. – 1983.
27. Калужнин Л.А. Основная теорема арифметики. – 1969.
28. Коровкин П.П. Введение в неравенства. – 1983.
29. Маркушевич А.И. Возвратные последовательности. – 1983.
30. Успенский В.А. Треугольник Паскаля. – 1979,

Книги из серии «Библиотека математического кружка»

31. Прасолов В.В. Задачи по планиметрии. Ч. I, II. – М.: Наука, 1986.
32. Радемахер Г., Теплиц О. Числа и фигуры. – М.: Физматгиз, 1962.
33. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Арифметика и алгебра. – М.: Наука, 1965.
34. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы планиметрии. – М.: Наука, 1967.
35. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. Геометрия (стереометрия). – М.: Гостехиздат, 1954.
36. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум. – М.: Наука, 1970.
37. Шклярский Д.О., Ченцов Н.Н., Яглом И.М. Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии. – М.: Наука, 1974.
38. Яглом И.М. Геометрические преобразования. Ч. I, II. – М.; Л.: Гостехиздат, 1956.
39. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. – М.; Л.: Гостехиздат, 1954.

40. Яглом А.М., Яглом И.М. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. – М.: Гостехиздат, 1954.
41. Зарубежные математические олимпиады // Конягин С.В., Тоноян Г.А., Шарыгин И.Ф. и др. / Под ред. И.Н.Сергеева. – М.: Наука, 1987.

Книги из серии «Библиотечка «Квант»

42. Александров П.С. Введение в теорию групп. – 1980.
43. Башмаков М.И., Беккер Б.М., Гольховой В.М. Задачи по математике (алгебра и анализ). – 1982.
44. Болтянский В.Г., Ефремович В.А. Наглядная топология. – 1982.
45. Занимательно о физике и математике / Сост. Кротов С.С. и Савин А.П.; Под ред. Л.Г.Асламазова. – 1987.
46. Колмогоров А.Н. Математика – наука и профессия. – 1988.
47. Оре О. Приглашение в теорию чисел. – 1980.
48. Тихомиров В.М. Рассказы о максимумах и минимумах. – 1986.
49. Шарыгин И.Ф. Задачи по геометрии. Планиметрия. – 1986.

Учебники, монографии

50. Башмаков М.И. Математика: Экс. учеб. пособие для СПТУ. – М.: Высшая школа, 1987.
51. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир, 1965.
52. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. – М.: Наука, 1969.
53. Виноградов И.М. Основы теории чисел. – М.: Наука, 1972.
54. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. – М.: Наука, 1981.
55. Зыков А.А. Введение в теорию графов. – М.: Наука, 1987.
56. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. – М.: Наука, 1987.
57. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х томах. Т. 2. Геометрия. – М.: Наука, 1987.
58. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / Под ред. К.А.-Рыбникова. – М.: Наука, 1982.
59. Математическое просвещение. Вып. 1–6. – М.: Физматгиз, 1957–1962.
60. Пойа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. Т. 1, 2. – М.: Наука, 1978.
61. Олехник С.Н., Нестеренко Ю.В., Потапов М.К. Старинные занимательные задачи. М.: Наука, 1985.
62. Фаддеев Д.К. Лекции по высшей алгебре. – М.: Наука, 1984.
63. Харари Ф. Введение в теорию графов. – М.: Мир, 1983.

64. Холл М. Комбинаторика. – М.: Мир, 1970.

Статьи из журнала «Квант»

65. Болтянский В.Г. Шесть зайцев в пяти клетках. – 1977, № 2.

66. Васильев Н.Б. Расстановка кубиков. – 1972, № 4.

67. Васильев Н.Б., Гальперин Г.А. Упаковка квадратов. – 1973, № 4.

68. Васильев Н.Б., Зелевинский А.В. Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения. – 1973, № 4.

69. Васильев Н.Б., Толтыго А.К. Плавные последовательности. – 1977, № 6.

70. Гальперин Г.А., Гальперин В.М. Освещение плоскости прожекторами. – 1981, № 11.

71. Гутенмахер В.Л. Косоугольные координаты и области Дирихле. 1972, № 4.

72. Лодкин А.А. Функциональное уравнение на сфере. – 1977, № 6.

73. Ионин Ю.И., Плоткин А.И. Среднее значение функции. – 1977, № 7.

74. Тоом А.Л. Из жизни единиц. – 1977, № 4.

75. Фрейвальд Р.В. Переключательные схемы. – 1972, №2.

76. Тихомиров В.М. Об одной олимпиадной задаче. – 1983, № 1.

77. Фомин С.В. Билеты и ящики. – 1978, № 5.

Информация о всероссийских и всесоюзных олимпиадах в журнале «Математика в школе»

78. Н.А.Ермолаева, Л.М.Пашкова, Т.А.Сарычева, М.И.Башмаков, И.Н.Бернштейн, Н.Б.Васильев, Г.А.Гальперин, В.Л.Гутенмахер, Ю.В.Нестеренко, И.С.Петраков, А.С.Пономаренко, А.М.Слинько и др. 1961, № 5; 1962, № 5; 1964, № 6; 1965, № 5; 1966, № 6; 1967, №5; 1968, № 5; 1969, № 4; 1970–1973, № 5; 1974–1979, № 6; 1981, № 6; 1982, № 6; 1984, № 5; 1985, № 6.

Информация о всесоюзных олимпиадах в журнале «Квант»

79. В.Л.Гутенмахер, И.Н.Клумова, М.Л.Смолянский, Н.Х.Розов и др. 1970, № 5; 1971, № 11; 1972, № 10; 1973, № 9; 1974, № 10; 1975, № 11; 1976, № 11; 1977, № 11; 1978, № 10; 1979, №11.

80. В.В.Вавилов, А.Н.Земляков, И.Н.Клумова, Л.П.Купцов, А.М.Слинько, С.В.Резниченко и др. 1980–1987, № 11.

81. Н.Н.Константинов. Шестой турнир городов. 1985, № 11.

СПИСОК АВТОРОВ ЗАДАЧ

Здесь мы постарались упомянуть тех, кто предложил наиболее оригинальные задачи и чье творчество существенно повлияло на стиль олимпиад. Как правило, очень трудно установить истинных авторов той или иной задачи – многие факты элементарной математики многократно переоткрываются; окончательный вид задача приобретает обычно в результате коллективной работы жюри. Этот список основан на публикациях об олимпиадах [78–80] и частично на наших воспоминаниях,

- Агафонов Б.Г. 280
Агаханов Н.Х. 435, 449
Анджанс А.В. 339 (парабола), 344, 421, 441, 458
Арнольд В.И. 406 (черные и белые области)
Батырев В.В. 269
Берзиньш А.А. 240, 266, 340 (таблица), 350, 383 (ряд трехчленов), 401, 409, 413, 446
Берник В.И. 436
Бернштейн И.Н. 242 (игра с многочленом), 250 (слова и гири), 268
Болотов А.А. 394
Бородин О.В. 271 (парламент)
Васильев Н.Б. 225
Вайнтроб А.Ю. 294
Гашков С.Б. 334
Григорян А.А. 343
Гринберг В.С. 283
Гуревич Г.А. 231 (универсальная перестановка)
Гусятников П.Б. 348 (периметр тетраэдра)
Гутенмахер В.Л. 243 (гномы), 260 (автоматы и карточки), 276 (преобразование Лоренца)
Дубровский В.Н. 261
Дужин С.А. 425
Егоров А.А. 239, 282
Ивлев Б.М. 426, 456
Карташов Н.В. 310 (сплетни), 320, 367
Келарев А.В. 336
Клюшин А.В. 460
Колотов А.Т. 258, 296 (коротышки), 386

Конягин С.В. 257 (редкая последовательность), 281 (код), 314 (черно-белая таблица), 317, 416, 459

Курляндчик Л.Д. 352

Лодкин А.А. 234 (функция на сфере)

Ляшко О.В. 320, 461

Меркурьев А.С. 453

Мусин О.Р. 377

Нестеренко Ю.В. 337, 300, 323, 345 (перестановка), 346, 347, 405, 417

Нецветаев Н.Ю. 237

Плоткин А.И. 249, 265

Произолов В.В. 229, 241, 263, 274 (векторы), 285, 333, 410 (сумма модулей)

Савин А.П. 331

Салихов В. 451

Сапир М.В. 359

Сергеев И.Н. 450

Серов М.И. 221, 272

Сибирский К.С. 247 (подсуммы)

Сираждинов С.Х. 267 (дисперсия)

Слинько А.М. 256 (игра со спичками)

Толпыго А.К. 222, 238 (фишки на окружности)

Туркевич Э.Г. 251 (коммутирующие многочлены)

Флаас Д.Г. 396, 439

Фомин Д.В. 455 (игра с делителями)

Фомин С.В. 220, 233 (плюсы и минусы), 246 (билеты и ящики), 264

Хухро Е.И. 369

Шустин Е.И. 225 (особые звенья)

Шарыгин И.Ф. 381, 402, 440

СОДЕРЖАНИЕ

Условия задач	5
Решения, указания, ответы	45
Тематический путеводитель	103
Задачи для тренировки	113
Список литературы	122
Список авторов задач	126

Николай Борисович Васильев, Андрей Александрович Егоров

ЗАДАЧИ ВСЕСОЮЗНЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД

Часть 2

Библиотечка «Квант⁺». Выпуск 119

Приложение к журналу «Квант⁺» №1 / 2011

Редактор *А.Ю.Котова*

Обложка *А.Е.Пацхверия*

Макет и компьютерная верстка *Е.В.Морозова*

Компьютерная группа *Е.А.Митченко, Л.В.Калиничева*

Формат 84×108 1/32. Бум. офсетная. Гарнитура кудряшевская

Печать офсетная. Объем 4 печ.л. Тираж 2500 экз.

Заказ № 3409

119296 Москва, Ленинский пр., 64-А, «Квант⁺»

Тел.: (495)930-56-48, e-mail: math@kvantjournal, phys@kvantjournal

Отпечатано с готовых диапозитивов

в ППП «Типография «Наука»

121099 Москва, Шубинский пер., д. 6

60 e
Индекс 70465



Библиотечка КВАНТ+



ВЫПУСК

119